دانشکده مهندسی کامپیوتر

عنوان درس:

ارزیابی کارایی سیستم‌های کامپیوتری

Performance Evaluation of Computer Systems (PECS)

جلسه ۱۵: شبکه‌های صف

مدرس:

محمد عبداللهی ازگمی

(Mohammad Abdollahi Azgomi)

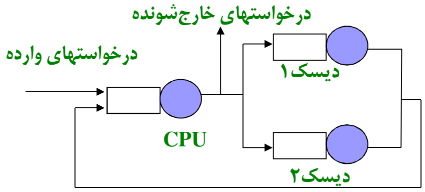
azgomi@iust.ac.ir

فهرست مطالب

- مقدمه
- شبکه‌های صف باز:
  - شبکه‌های صف باز ارسال به جلو (feed forward QN)
  - قضیه برک (Burke's theorem)
  - قضیه لیتل برای شبکه‌های صف
  - شبکه‌های صف باز دارای بازخورد (feedback)
  - قضیه جکسون (Jackson theorem)
- شبکه‌های صف بسته:
  - حل حالت پایدار شبکه‌های صف بسته با CTMC
  - حل حالت پایدار با قضیه گوردن و نیول (Gordon and Newell theorem)

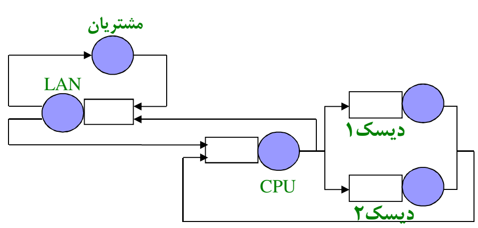
مقدمه

- شبکه‌های صف (QN: queueing networks) برای مدل‌سازی رقابت بر سر سرویس‌دهنده‌ها یا منابع چندگانه مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- مشتریان یا درخواست‌های وارده به یک شبکه صف قابل دسته‌بندی به دو رده باز (open) و بسته (closed) بر اساس نامحدود و ثابت بودن تعداد مشتریان یا درخواستها است.
- در یک رده باز (open class)، مشتریان وارد شبکه شده و سرویس‌دهنده‌های مختلف آنرا ملاقات نموده و سپس شبکه را ترک می‌کنند.
- اگر همه رده‌های مشتریان یک شبکه صف، باز باشند، به آن یک شبکه صف باز (open QN) گفته می‌شود.
- شکل زیر یک شبکه صف باز برای یک سیستم کامپیوتری را نشان می‌دهد:



مقدمه

- رده‌های بسته (closed classes) باتعداد ثابت مشتریان در شبکه صف مشخص می‌شوند.
- اگر همه رده‌های مشتریان یک شبکه صف، بسته باشند، به آن شبکه صف بسته (closed QN) گفته می‌شود.
- یک شبکه صف که برخی از کلاسهای مشتریان آن باز و برخی دیگر بسته باشند، شبکه صف تلفیقی (hybrid QN) گفته می‌شود.
- شکل زیر یک شبکه صف بسته برای یک سیستم مشتری–سرویس‌دهنده (client/server) را نشان می‌دهد:

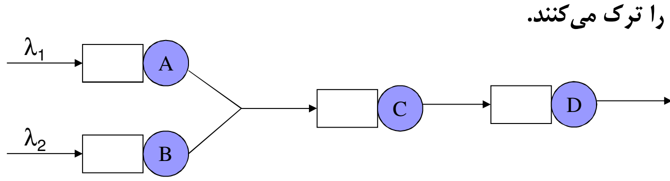


مقدمه

- شبکه‌های صف باز هیچ محدودیتی برای حداکثر تعداد مشتریان سیستم قرار نمی‌دهد.
- اما مواقعی وجود دارد که می‌توان یک سیستم کامپیوتری را با تعداد ثابت یا متناهی درخواستها مدل‌سازی نمود. موارد زیر مثالهایی از چنین وضعیت‌هایی هستند:
  - یک سیستم کامپیوتری چندبرنامه‌ای (multi-programming) که تحت بار (load) سنگین است. در چنین شرایطی اجازه اجرای برنامه جدید داده نمی‌شود و همان تعداد برنامه‌های موجود، اجرا خواهند شد.
  - یک سیستم اشتراک زمانی که تعداد ترمینالهای متصل به سیستم ثابت هستند.
  - یک سیستم مشتری-سرویس‌دهنده که تعداد درخواستهای صادره از ایستگاه‌های مشتری به سرویس‌دهنده، معلوم است.
- در ادامه ابتدا شبکه‌های صف باز و سپس شبکه‌های صف بسته را معرفی نموده و با روشهای حل آنها آشنا می‌شویم.

شبکه‌های صف باز

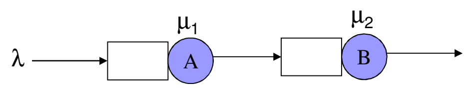
- همانگونه که اشاره شد، در شبکه‌های صف باز مشتریان از خارج وارد شبکه شده، در داخل شبکه دور زده (circulate) و سرانجام شبکه را ترک می‌کنند.
- در شکل زیر مشتریان از دو مسیر وارد دو ایستگاه A با نرخ λ_1 و B با نرخ λ_2 می‌شوند. سپس با هم ادغام شده و وارد ایستگاه C شده و آنگاه وارده ایستگاه D می‌شوند و از آنجا شبکه را ترک می‌کنند.



- در شبکه شکل فوق ممکن است که بخواهیم معیارهایی زیر را محاسبه کنیم:
  - میانگین تعداد مشتریان موجود در شبکه،
  - میانگین زمان صرف‌شده توسط مشتریان در شبکه، یا
  - میانگین زمان صرف‌شده در شبکه توسط مشتریانی که از طریق صف A یا B وارد شبکه می‌شوند.

شبکه‌های صف ارسال به جلو

- شبکه‌های صف ارسال به جلو (**feed forward QN**) شبکه‌هایی هستند که هر ایستگاه صف موجود در شبکه، ترافیک ورودی را به ایستگاه بعدی ارسال می‌کند.
- برای مثال شبکه‌ای از دو صف پشت سرهم (**two tandem queues**) زیر را در نظر بگیرید:



- در این شکل، چون خروجی صف **A** ورودی صف **B** است ما نمی‌توانیم دو صف را مستقل از هم فرض کنیم.
- آیا می‌توانیم این شبکه را با **CTMC** مدل‌سازی کنیم؟ چگونه؟ تعریف حالت چیست؟

شبکه‌های صف ارسال به جلو

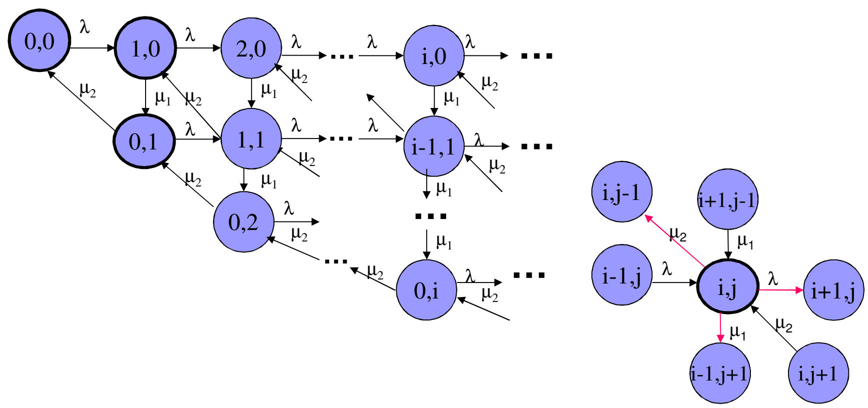
- برای مدل‌سازی شبکه‌ای از دو صف پشت سرهم می‌توانیم از **CTMC** استفاده کنیم. برای این منظور تعریف حالت عبارت است از یک زوج مرتب که متشکل از تعداد مشتریان در صف اول و تعداد مشتریان در صف دوم است:

$$(N_A(t), N_B(t))$$

- حالا باید نمودار حالت-گذر را رسم کنیم...

شبکه‌های صف ارسال به جلو

- نمودار حالت-گذر در شکل زیر نشان داده شده است:



شبکه‌های صف ارسال به جلو

- با تعریف حالت به‌صورت $(N_1(t), N_2(t))$، احتمالات حالت پایدار چنین زنجیره مارکوفی هم به صورت زیر تعریف می‌شود:
- $\pi(i, j) = P(N_1=i, N_2=j)$, where $N_i = \text{Lim}_{t\to\infty} N_i(t)$
- آنگاه با فرض حالت پایدار، می‌توانیم معادلات جریان را بنویسیم:
  - $\lambda\pi(0, 0) = \mu_2\pi(0, 1)$ <= گره اول
  - $(\lambda+ \mu_2)\pi(0, i) = \mu_2\, \pi(0, i+1)+\mu_1\, \pi(1, i-1)$ <= گره‌های ضلع پایین
  - $(\lambda+ \mu_1)\pi(i, 0) = \lambda\, \pi(i-1, 0)+\mu_2\, \pi(i, 1)$ <= گره‌های ضلع بالا
  - $(\lambda+ \mu_1 + \mu_2)\pi(i, j) = \mu_1\, \pi(i+1, j-1) + \mu_2\, \pi(i, j+1)+ \lambda\pi(i-1, j)$ <= گره‌های میانی

$$\boxed{\sum_{i,j>=0}\pi(i,j)=1}$$

شبکه‌های صف ارسال به جلو

- دستگاه معادلات فوق قابل حل بوده و خواهیم داشت:

$$\pi(i, j) = (1-\rho_1)\rho_1^{\,i}(1-\rho_2)\rho_2^{\,j} \qquad i, j \geq 0$$

  - که در آن داریم: $\rho_i = \lambda/\mu_i$
- درستی معادله فوق را می‌توانیم با جاگذاری در دستگاه معادلات بررسی کنیم.

قضیه برک: ورودی پواسان = خروجی پواسان

- یک خاصیت سودمند که در حل شبکه‌های صف کاربرد فراوان داشته و ما را از استفاده از CTMC برای حل شبکه‌های صف بی‌نیاز می‌کند، قضیه برک (Burke's theorem) است:

قضیه برک: فرآیند خروجی از صف M/M/1 یک فرآیند پواسان با نرخ λ و مستقل از فرآیند ورودی است.

  - قضیه فوق اثبات دارد که برای دیدن آن می‌توانید مراجع درس را ببینید.
- با استفاده از قضیه فوق می‌توانیم شبکه‌های صف ارسال به جلو را با بهره‌گیری از خواص ادغام و انشعاب فرآیند پواسان، به صف‌های مجزا تجزیه نموده و سپس با ادغام نتایج حل آنها شبکه کلی را به آسانی حل کنیم.

قضیه برک: ورودی پواسان = خروجی پواسان

- با بهره‌گیری از قضیه برک احتمالات حالت پایدار یک شبکه ارسال به جلو متشکل از **k** ایستگاه صف که نرخ ورود به اولین صف λ است به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\pi(n_1,n_2,\ldots,n_k)=P(N_1=n_1,N_2=n_2,\ldots,N_k=n_k)=\prod_{i=1}^{k}(1-\rho_i)\rho_i^{n_i} \qquad n_i\ge 0,\ 1\le i\le k$$

- تعداد مشتریان در شبکه صف (**N**)، مجموع مشتریان در صف‌ها (**N_i**) خواهد شد:

$$N=\sum_{i=1}^{k}N_i$$

- میانگین تعداد مشتریان در شبکه صف (**L**)، مجموع میانگین تعداد مشتریان در صف‌ها (**L_i**) خواهد شد. نحوه محاسبه **L_i** را برای صف‌های **M/M/1** هم از قبل می‌دانیم:

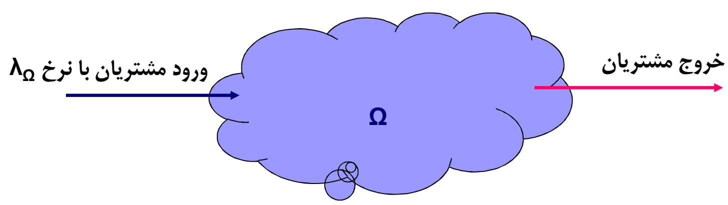
$$L=\sum_{i=1}^{k}L_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{\mu_i-\lambda_i}$$

- برای محاسبه **w** می‌توانیم از قانون لیتل استفاده کنیم:

$L = \lambda w \;\; => \;\; w = L/\lambda$

قضیه لیتل برای شبکه‌های صف

- قانون لیتل برای هر محدوده‌ای (Ω) از یک شبکه باز یا بسته برقرار است:



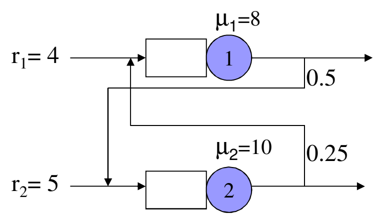
- آنگاه قانون لیتل برای محدوده فوق:

$$L_\Omega = \lambda_\Omega * w_\Omega$$

  - λ_Ω: نرخ ورود مشتریان به محدوده
  - L_Ω: میانگین تعداد مشتریان در محدوده
  - w_Ω: میانگین زمان اقامت مشتریان در محدوده (میانگین زمان سرویس توسط محدوده)

شبکه‌های صف باز دارای بازخورد

- یک شبکه از تعدادی صف را در نظر بگیرید که از بعضی از صفها به صفهای دیگر بازخورد (feedback) داریم.
- برای مثال در شبکه زیر، صف (۱) از بیرون دارای ورودی است و ضمناً بخشی از خروجی صف (۲) هم به آن بازخورد می‌شود. همین وضعیت در مورد صف (۲) هم وجود دارد.



- در چنین وضعیتی آیا هنوز می‌توان صفها را مستقل از هم فرض نمود؟

شبکه‌های صف باز دارای بازخورد

- حال می‌خواهیم که با حل این نوع شبکه‌های صف آشنا شویم.
- برای این منظور شبکه‌ای از k صف را در نظر می‌گیریم که هر کدام از صفها دارای زمان سرویس نمایی با نرخ μ_i هستند.
- ورودیها از بیرون به صفها نیز طبق فرآیند پواسان با نرخ r_i است.
- از بعضی از صفها به صفهای دیگر بازخورد (feedback) داریم. در این صورت احتمال انشعاب (branching probability) یا احتمال مسیریابی (routing probability) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنید:
  - $p_{i,j}$: احتمال اینکه یک مشتری که صف i را ترک می‌کند وارد صف j بشود.
- آنگاه احتمال اینکه یک مشتری که صف i را ترک می‌کند از شبکه صف خارج شود:

$$\sum_{j=1}^{k} p_{i,j} \leq 1 \Rightarrow P(customer\ leaves\ system\ after\ i) = 1 - \sum_{j=1}^{k} p_{i,j}$$

شبکه‌های صف باز دارای بازخورد

- در این صورت نرخ ورود به صف j، که به λ_j نشان می‌دهیم، از معادله زیر بدست می‌آید، که به آن **معادله ترافیک** (traffic equation) گفته می‌شود:

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_{i,j} \qquad 1 \le j \le k$$

نرخ ورود از خارج به گره

مجموع ترافیک‌های ورودی از سایر صفها به این صف

- معادلات ترافیک را می‌توانیم برای همه گره‌های صف نوشته و با حل دستگاه معادلات حاصله، نرخ ورود به هر صف (λ_j) را بدست آوریم.
- احتمال حالت پایدار تعداد مشتریان در شبکه صف برابر است با:

$$\pi(n_1, n_2, \ldots, n_k) = P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \ldots, N_k = n_k) \qquad n_i \ge 0$$

  - این احتمال چگونه قابل محاسبه است؟ به‌دلیل وابستگی جریانهای ورودی گره‌ها به جریانهای خروجی از صف‌های دیگر، نمی‌توانیم به‌راحتی فرض کنیم که هر کدام از آنها یک صف مجزای M/M/1 هستند.

قضیه جکسون برای شبکه‌های باز

- ما می توانیم در اینجا هم از CTMC استفاده کنیم.
- اما، قضیه جسکون (Jackson) برای شبکه‌های باز می‌گوید که در حالت کلی و برای شبکه‌های صف بزرگ می‌توانیم فرض کنیم که هرکدام از صفها هنوز یک صف M/M/1 هستند و به حالت پایدار رسیده‌اند و ما می‌توانیم آنها را به‌طور مجزا درنظر گرفته و حل کنیم.
- **فرضیات قضیه جکسون:**
  - شبکه صف باز متشکل از تعداد زیادی گره است.
  - به تعداد زیادی از گره‌ها ورودی از خارج داریم.
  - هر کدام از صفها به حالت پایدار رسیده‌اند.
- در این صورت نتایجی که بدست خواهیم آورد با تقریب بسیار خوبی با نتایج حاصل از شبیه‌سازی برابر خواهند بود.
- هر قدر که شبکه بزرگتر باشد و میزان ورود از خارج به صفها بیشتر باشد، تقریب فوق به جواب دقیق نزدیکتر خواهد بود.

قضیه جکسون برای شبکه‌های باز

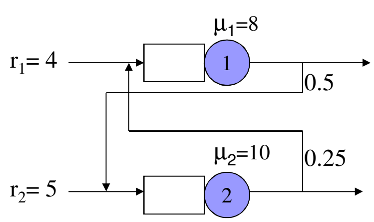
- قضیه جکسون (Jackson's theorem): هرکدام از صفهای شبکه باز، همانند یک صف مجزا رفتار می‌کنند و داریم:

$$\pi(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \prod_{i=1}^{k} (1-\rho_i)\rho_i^{n_i} \qquad n_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq k$$

- با نوشتن معادلات جریان، می‌توان با جایگذاری نتیجه فوق درستی آنرا نشان داد.
- بحثهای بیشتر در مورد این قضیه را می‌توانید در مراجع درس مطالعه کنید.

مثالی از شبکه‌های صف باز دارای بازخورد

- حالا مثالی از یک شبکه باز دارای بازخورد ارائه نموده و با استفاده از نتایج گفته شده آنرا حل می‌کنیم.
- شبکه زیر را در نظر بگیرید:



- معادلات ترافیک برای آن عبارتند از:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= r_1 + \lambda_2 p_{2,1} \\ \lambda_2 &= r_2 + \lambda_1 p_{1,2}\end{aligned} \;\rightarrow\; \begin{aligned}\lambda_1 &= 4 + 0.25\lambda_2 \\ \lambda_2 &= 5 + 0.5\lambda_1\end{aligned} \;\rightarrow\; \begin{aligned}\lambda_1 &= 6 \\ \lambda_2 &= 8\end{aligned}$$

مثالی از شبکه‌های صف باز دارای بازخورد

- مشاهده می شود که داریم : $\lambda_1/\mu_1 = 6/8 < 1$ و $\lambda_2/\mu_2 = 8/10 < 1$
  - یعنی هر دو صف به حالت پایدار می رسند.
- آنگاه با استفاده از نتایج قضیه جکسون خواهیم داشت:

$$\pi(n_1,n_2)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n_1}\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n_2}$$

$$L=\sum_{i=1}^{2}L_i=\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda_i}{\mu_i-\lambda_i}=3+4=7$$

$$w=L/\lambda=7/9=0.78$$

مثالی از شبکه‌های صف باز دارای بازخورد

- همچنین می‌توانیم زمان صرف شده برای مشتریانی که از طریق گره (۱) یا (۲) وارد می‌شوند را هم بدست آوریم:

$$\begin{aligned}w^{(1)}&=w_1+0.5w^{(2)}\\ w^{(2)}&=w_2+0.25w^{(1)}\end{aligned} \rightarrow \begin{aligned}w^{(1)}&=1/(\mu_1-\lambda_1)+0.5w^{(2)}\\ w^{(2)}&=1/(\mu_2-\lambda_2)+0.25w^{(1)}\end{aligned} \rightarrow$$

$$\begin{aligned}w^{(1)}&=1/(8-6)+0.5w^{(2)}\\ w^{(2)}&=1/(10-8)+0.25w^{(1)}\end{aligned} \rightarrow \begin{aligned}w^{(1)}&=0.5+0.5w^{(2)}\\ w^{(2)}&=0.5+0.25w^{(1)}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{aligned}w^{(1)}&=0.86\\ w^{(2)}&=0.71\end{aligned}$$

مثالی از شبکه‌های صف باز دارای بازخورد

- نکته مهمی که در حل با استفاده از روش فوق باید به آن دقت کنیم این است که با حل معادلات ترافیک و بدست آوردن λ_i، باید شرط پایداری صفهای مجزا برقرار باشد:

$$\lambda_i / \mu_i < 1$$

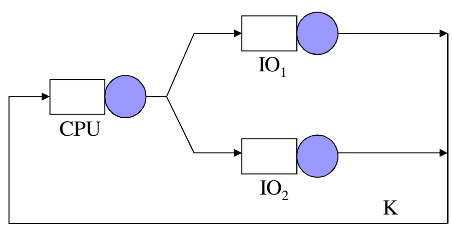
- در غیر این صورت نتایج گفته شده قابل استفاده نخواهد بود.

بسطهای قضیه جکسون

- نتایج قضیه جکسون برای شرایط زیر هم برقرار است:
  - در صورتی که صفهای مجزا M/M/m باشند.
  - در صورتی که صفهای مجزا M/M/m/k باشند.
  - سرویس‌دهنده‌های تک صفها دارای انتظام اشتراک پردازنده (PS) و دارای توزیع زمان سرویس دلخواه باشند.
- همچنین، بسطهایی (extensions) نظیر بسط BCMP برای قضیه جکسون وجود دارد که شرایط کاربرد آنها آسانتر از قضیه جکسون است.

شبکه‌های صف بسته

- همانگونه که قبلاً گفتیم، در شبکه‌های بسته، تعداد مشتریان محدود و متناهی است و مشتریان موجود هرگز شبکه را ترک نمی‌کنند.
- برای مثال، شبکه بسته زیر یک سیستم کامپیوتری را مدل‌سازی می‌کند که K کار در آن وجود دارد:



- در ادامه می‌خواهیم که با روش حل اینگونه شبکه‌ها آشنا شویم.

شبکه‌های صف بسته

- فرض می‌کنیم جمعیت متناهی از N مشتری مابین M صف در یک شبکه بسته دور می‌زنند:
  - هرکدام از صفها، تک سرویس‌دهنده بوده و زمان سرویس آنها نمایی با نرخ μ_i است.
  - احتمالات مسیریابی بین گره‌ها $p_{i,j}$ $(i, j \leq M)$ است.
  - نسبت ملاقات (visit ratio)، که با v_i نشان داده می‌شود، مشخص می‌کند که چه بخشی از مشتریان که وارد یک گره خاص (مثلاً گره اول) می‌شوند وارد گره iام هم می‌شوند.
- آنگاه می‌توانیم معادلات ملاقات را برای گره‌های مختلف بنویسیم:

$$v_i = \sum_{j=1}^{M} v_j p_{j,i} \qquad i = 2,\ldots,M$$

- به دلیل وابستگی دستگاه معادلات حاصله، با فرض یک مقدار ثابت برای یکی از v_iها (مثلاً: $v_1=1$) و با حل دستگاه معادلات حاصله می‌توانیم سایر v_iها را بدست آوریم.

شبکه‌های صف بسته

- آنگاه می‌توانیم توان عملیاتی گره‌ها را بدست آوریم:

$$\frac{\gamma_i}{\gamma_j} = \frac{v_i}{v_j} \qquad 1 \le i, j \le M$$

- در این صورت، نسبت ملاقات مشخص کننده توان عملیاتی نسبی گره‌ها خواهد بود.

حل حالت پایدار شبکه‌های صف بسته با CTMC

- برای حل یک مدل شبکه صف بسته می‌توانیم از یک CTMC استفاده کنیم حالت با بردار تعداد مشتریان در گره‌های مختلف شبکه تعریف می‌شود:

$$(\mathbf{N_1(t), N_2(t), \ldots, N_M(t)})$$

- آنگاه در حالت پایدار:

$$(\mathbf{N_1, N_2, \ldots, N_M}) = \mathbf{Lim}_{t\to\infty}(\mathbf{N_1(t), N_2(t), \ldots, N_M(t)})$$

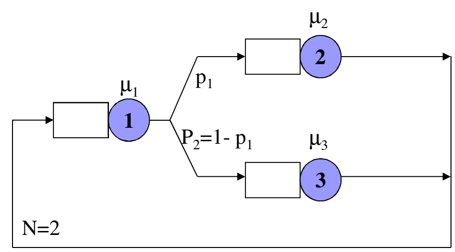
- احتمالات حالت پایدار مشتریان به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\pi(n_1, n_2, \ldots, n_M) = P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \ldots, N_M = n_M) \qquad n_i \ge 0,$$

- آنگاه می‌توانیم معادلات جریان را نوشته و حل کنیم.

مثالی از شبکه‌های صف بسته

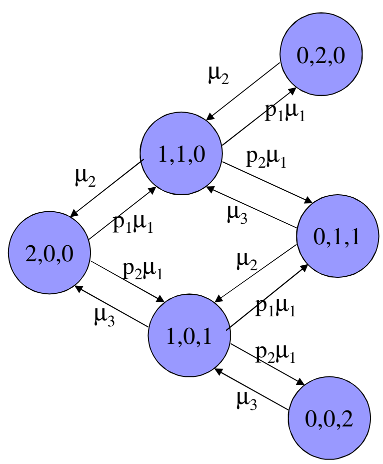
- مدل شبکه بسته زیر را در نظر بگیرید:



- برای بدست آوردن CTMC برای این شبکه، حالت را تعریف می‌کنیم که یک سه‌تایی خواهد بود: (N_1, N_2, N_3)

مثالی از شبکه‌های صف بسته

- آنگاه CTMC زیر را بدست می‌آوریم:



مثالی از شبکه‌های صف بسته

- حالا می‌توانیم دستگاه معادلات جریان را بنویسیم:
  - $(p_1+p_2)\mu_1\pi(2, 0, 0) = \mu_2\pi(1, 1, 0)+\mu_3\pi(1, 0, 1)$
  - $(p_1+p_2)\mu_1\pi(1, 1, 0) = \mu_2\pi(0, 2, 0)+\mu_3\pi(0, 1, 1)$
  - $(p_1+p_2)\mu_1\pi(1, 0, 1) = \mu_2\pi(0, 1, 1)+\mu_3\pi(0, 0, 2)$
  - $p_1\mu_1\pi(1, 1, 0) = \mu_2\pi(0, 2, 0)$
  - $(\mu_2+ \mu_3)\, \pi(0, 1, 1) = p_2\mu_1\pi(1, 1, 0)+ p_2\mu_1\pi(1, 0, 1)$
  - $p_2\mu_1\pi(0, 0, 2) = \mu_3\pi(0, 0, 2)$
  - $\pi(2, 0, 0)+\pi(1, 1, 0)+\pi(1, 0, 1)+\pi(0, 2, 0)+\pi(0, 1, 1)+\pi(0, 0, 2)=1$
- با حل این دستگاه معادلات (هفت معادله و شش مجهول)، می‌توانیم احتمالات حالت پایدار را بدست آوریم.

حل حالت پایدار با قضیه گوردن و نیول

- علاوه بر روش فوق راه حل دیگری که وجود دارد، استفاده از قضیه گوردن و نیول (Gordon and Newell) است.
- قضیه گوردن و نیول:

$$\pi(\vec{n}) = \frac{1}{G(N)} \prod_{i=1}^{M} \left(\frac{v_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \quad \vec{n} \geq \vec{0}, \sum_{i=1}^{M} n_i = N$$

- که در آن داریم:

$$\vec{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_M)$$

- همچنین، G(N) یک مقدار ثابت است که باید طوری انتخاب شود که داشته باشیم:

$$\sum \pi(\vec{n}) = 1$$

مثالی از حل حالت پایدار با قضیه گوردن و نیول

- حالا همان مثال قبلی را با استفاده از این قضیه حل می‌کنیم.
- برای این منظور فرض می‌کنیم که $\mu_1=2$، $\mu_2=3$ و $\mu_3=2$ است.
- همچنین فرض می‌کنیم که: $p_1=3/4$ و $p_2=1/4$ است.
- آنگاه با انتخاب $V_1= 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 p_1 \\ v_3 &= v_1 p_2 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} V2&=3/4 \\ V3&=1/4 \end{aligned}$$

- حالا می‌توانیم نتایج قضیه گوردن و نیول را بنویسیم:

$$\pi(\vec{n}) = \frac{1}{G(N)}(1/2)^{n_1}(1/4)^{n_2}(1/8)^{n_3}$$

مثالی از حل حالت پایدار با قضیه گوردن و نیول

- سپس با استفاده از $\sum \pi(\vec{n}) = 1$ می‌توانیم G(N) را بدست آوریم:

$$\pi(2,0,0) = \frac{1}{G(N)}(1/2)^2(1/4)^0(1/8)^0$$
$$\pi(1,1,0) = \frac{1}{G(N)}(1/2)^1(1/4)^1(1/8)^0$$
$$\pi(1,0,1) = \frac{1}{G(N)}(1/2)^1(1/4)^0(1/8)^1$$
$$\pi(0,2,0) = \frac{1}{G(N)}(1/2)^0(1/4)^2(1/8)^0$$
$$\pi(0,1,1) = \frac{1}{G(N)}(1/2)^0(1/4)^1(1/8)1$$
$$\pi(0,0,2) = \frac{1}{G(N)}(1/2)^0(1/4)^0(1/8)^2$$
$$\pi(2,0,0)+\pi(1,1,0)+\pi(1,0,1)+\pi(0,2,0)+\pi(0,1,1)+\pi(0,0,2)=1$$

$\rightarrow$ G(N) = ?

نکات آخر

- همانگونه که در فصل قوانین عملیاتی اشاره کردیم، به $D_i=v_i/\mu_i$، تقاضای سرویس (service demand) گفته می‌شود.
- قضیه گوردن و نیول هم دارای بسطهایی برای سایر انواع صفها است.

ابزار حل مدلهای صف

- برای حل و شبیه‌سازی مدلهای صف مجزا و شبکه‌های صف می‌توانید از ابزار قدرتمند WinPEPSY استفاده کنید.
- نگارش رایگان این نرم‌افزار موجود است. اما نگارش جدید آن تجاری بوده و باید خریداری شود.