

# ریاضی مهندسی پیشرفته

## مسائل سری پنجم

۱- اگر  $\varphi(x, y)$  در ناحیه نواری نامحدود  $0 \leq y \leq b$  در معادله‌ی لاپلاس صدق کند و داشته باشیم:

$$\varphi(x, 0) = f(x) \text{ و } \varphi(x, b) = 0 \text{ و برای } |x| \rightarrow \infty \text{ کراندار باشد،}$$

الف) نشان دهید که:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^\infty \frac{\sinh k(b-y)}{\sinh kb} f(x') \cos k(x'-x) dx' \right] dk$$

ب) به کمک نظریه مانده‌ها نشان دهید

$$\int_0^\infty \frac{\sinh px}{\sinh qx} \cos rx \, dx = \frac{\pi}{2q} \frac{\sin\left(\frac{p\pi}{q}\right)}{\cos\left(\frac{p\pi}{q}\right) + \cosh\left(\frac{r\pi}{q}\right)} ; (|p| < |q|)$$

ب) به کمک نتیجه قسمت الف و ب نشان دهید

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2b} \sin \frac{\pi y}{b} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x')}{\cosh \left[ \frac{\pi(x'-x)}{b} - \cos \left( \frac{\pi y}{b} \right) \right]} dx'$$

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln \left[ \frac{\cosh \frac{\pi}{b}(x'-x) - \cos \frac{\pi}{b}(y'-y)}{\cosh \frac{\pi}{b}(x'-x) - \cos \frac{\pi}{b}(y'+y)} \right] \text{ (ب) نتیجه بالا را به کمک تابع گرین نوار نامحدود یعنی}$$

بدست آورید.

۲- الف) تابع گرین را برای ناحیه قطاعی نامحدود  $0 \leq \theta \leq \alpha$  و  $0 \leq r < \infty$  به صورت قطبی و بشکل زیر بدست آورید:

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln \left[ \frac{r^{2\pi/\alpha} - 2r^{\pi/\alpha} r_0^{\pi/\alpha} \cos \frac{\pi}{\alpha}(\theta - \theta_0) + r_0^{2\pi/\alpha}}{r^{2\pi/\alpha} - 2r^{\pi/\alpha} r_0^{\pi/\alpha} \cos \frac{\pi}{\alpha}(\theta + \theta_0) + r_0^{2\pi/\alpha}} \right]$$

که در آن  $x_0 + jy_0 = r_0 e^{j\theta_0}$ .

ب) همچنین نشان دهید که:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\theta=0} = \frac{1}{\alpha r_0} \left[ \frac{r^{\pi/\alpha} r_0^{\pi/\alpha} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha}}{r^{2\pi/\alpha} - 2r^{\pi/\alpha} r_0^{\pi/\alpha} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha} + r_0^{2\pi/\alpha}} \right]$$

و نیز

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\theta=\alpha} = \frac{1}{\alpha r_0} \left[ \frac{r^{\pi/\alpha} r_0^{\pi/\alpha} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha}}{r^{2\pi/\alpha} + 2r^{\pi/\alpha} r_0^{\pi/\alpha} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha} + r_0^{2\pi/\alpha}} \right]$$

# ریاضی مهندسی پیشرفته

## مسائل سری پنجم

۳- دو صفحه نامحدود رسانای  $y = a$  و  $y = 0$  را در نظر میگیریم. تابع گرین معادله لاپلاس در فضای بین دو صفحه از معادله زیر استخراج می شود

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G(x, y, x', y') = \delta(x - x') \delta(y - y')$$

الف) تابع گرین را به صورت سری نامحدود زیر بدست آورید.

$$G = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi}{a} y \sin \frac{m\pi}{a} y' e^{-\frac{m\pi}{a}|x-x'|}$$

ب) نشان دهید که سری حاصل را می توان به صورت زیر در آورد:

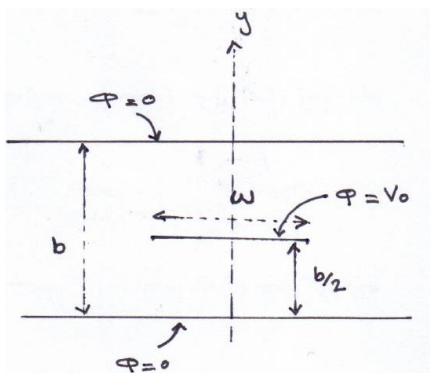
$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\sinh \frac{\pi}{2a} (z - z'^*)}{\sinh \frac{\pi}{2a} (z - z')} \right|$$

۴- الف) نشان دهید که نگاشت  $z = w + \frac{a^2 - b^2}{4w}$  با  $(a > b > 0)$ ، ناحیه بیضی  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  را به

ناحیه بیضی خارج دایره  $|w| = \frac{a+b}{2}$  تبدیل می کند.

ب) ظرفیت یک خازن استوانه شکل را که مقطع صفحات آن بیضی هایی با فاصله ی کانونی مشترک  $c$  و قطرهای بزرگ  $2a_1$  و  $2a_2$  می باشند، بر واحد طول پیدا کنید.

۱- می خواهیم یک کران بالا برای امپدانس مشخصه یک ریزنوار حفاظ شده (shielded Microstrip) به کمک روش وردشی (variational) پیدا کنیم.



الف) با به کار گرفتن تابع گرین مساله و با انتخاب  $\rho(x) = 1$  در

فاصله  $-\frac{w}{2} \leq x \leq \frac{w}{2}$  نشان دهید که:

$$\frac{1}{C} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} S_n$$

که در آن:

$$S_n = \frac{2}{\pi \epsilon_0} \left[ \left( \frac{b}{\pi w} \right) \frac{1}{n^2} - \left( \frac{b}{\pi w} \right)^2 \frac{1}{n^3} + \left( \frac{b}{\pi w} \right)^2 \frac{1}{n^3} e^{-\frac{n\pi w}{b}} \right]$$

ب)  $\frac{1}{C}$  را به کمک دو جمله اول سری برای  $\frac{w}{b} = 0.4$  حساب کنید. مقدار  $Z_0$  را تعیین کرده و با مقدار دقیقتر

$$\left( \sum_{n:\text{odd}} \frac{1}{n^3} = 1.0518, \sum_{n:\text{odd}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \right) \text{ مقایسه کنید. (نکته: } Z_0 = 113.23 \text{)}$$