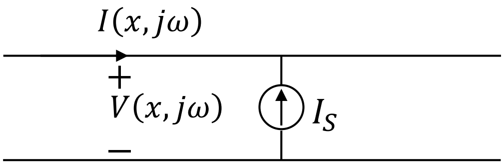
ریاضی مهندسی پیشرفته

مسائل سری سوم

۱- الف) معادله مربوط به خط انتقال زیر را برای $V(x)$ و $I(x)$ در حالت پایدار (steady state) به دست آورید.

ب) به ازای چه مقدار I_S معادله دیفرانسیل مربوط به $V(x)$ به شکل هنجار شده زیر در می‌آید؟



$$\frac{d^2V}{dx^2}+\omega^2 LCV=-\delta\left(x-x'\right)$$

....

۲- تابع گرین یک بعدی را برای معادله دیفرانسیل زیر با شرایط مرزی داده شده به دست آورید.

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)G\left(x,x'\right)=-\delta\left(x-x'\right);$$

$$\lim_{x\to-\infty}G\left(x,x'\right)=A\left(x'\right)e^{jkx}\ , \qquad \left[\frac{\partial}{\partial x}G\left(x,x'\right)+\alpha G\left(x,x'\right)\right]\Bigg|_{x=l}=0.$$

....

۳- در ناحیه استوانه‌ای $0\le r\le a,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le z\le h$، تابع گرین را برای عملگر لاپلاس با شرایط مرزی صفر دریکله با استفاده از روش بسط توابع ویژه به دست آورید.

....

۴- در مثال قبل، سری مربوط به متغیر شعاعی r در تابع گرین را به دست آورید و نسبت به r، شکل بسته تابع گرین را بنویسید (حاصل $\sum g_{mn}(r,r')$ را تعیین کنید).

....

۵- الف) تابع گرین عملگر لاپلاس را در دو بعد برای نیم صفحه $y>0$ و با شرط مرزی صفر نیومن (شرط مرزی عایق) یعنی $\left.\frac{\partial}{\partial y}G\right|_{y=0}=0$ به دست آورید

ب) با استفاده از تابع گرین به دست آورده شده، پاسخ معادله دیفرانسیل زیر را در نیم صفحه $y>0$ را به دست آورید.

$$\nabla^2 u\left(x,y\right)=f\left(x,y\right);\qquad \left.\frac{\partial}{\partial y}u\left(x,y\right)\right|_{y=0}=h\left(x\right)$$

که در معادله فوق $f(x,y)$ و $h(x)$ توابع معلوم می‌باشند.

....

۶- معادله زیر را در ناحیه با شرایط مرزی داده شده در نظر بگیرید

$$\nabla^2\varphi\left(x,y\right)=f\left(x,y\right);\qquad \begin{cases}\varphi\left(0,y\right)=0;\ \varphi\left(l,y\right)=0\\ \varphi\left(x,0\right)=0;\ \varphi\left(x,y\to\infty\right):\ finite\end{cases}$$

الف) نشان دهید پاسخ مسئله را می‌توان به شکل

$$\varphi\left(x,y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(y\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

به دست آورد که در آن $C_n(y)$ در معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم زیر با شرایط مرزی داده شده صدق میکند.

$$C_n''(y)-\frac{n^2\pi^2}{l^2}C_n(y)=h_n(y);\qquad \begin{cases}C_n(0)=a_n\\ C_n(y\to\infty):\ finite\end{cases}$$

که در معادله فوق:

$$h_n(y)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,y)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

ب) برای حالت خاص $f(x,y) = h(x) = 1$، ضرایب $C_n(y)$ را تعیین کنید.

....

۷– می‌خواهیم معادله پواسون $\nabla^2\varphi=h$ را در ناحیه $\boldsymbol{R}$ با شرایط مرزی همگن دریکله $\varphi=0$ و نیومن $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$ و یا مخلوط $\varphi+\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$ حل کنیم. اگر معادله مقادیر ویژه مربوط بصورت $\nabla^2F+\lambda F=0$ در ناحیه $\boldsymbol{R}$ و با همان شرایط مرزی دارای مقادیر ویژه λ_1، λ_2 و ... با توزیع ویژه φ_1، φ_2 و ... باشد به صورتی که $\nabla^2\varphi_k+\lambda_k\varphi_k=0$ نشان دهید که پاسخ مسأله اصلی بشکل

$$\varphi=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{\lambda_k}\varphi_k$$

می باشد (با این شرط که $\lambda=0$ یک مقدار ویژه نباشد) که در آن A_k ضرایب h در نمایش آن بصورت توابع ویژه می باشد. یعنی:

$$h=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\varphi_k$$

و به این ترتیب پاسخ مسأله را بر حسب مقادیر ویژه و h بدست آورید.

....

۸– معادله پواسون بصورت $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=h(x,y)$ را در ناحیه $0\le x\le a$ و $0\le y\le b$ و با شرط مرزی صفر دریکله در تمام مرز در نظر بگیرید. به کمک نتیجه مسئله قبل نشان دهید که

$$\phi(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{a}y$$

و مقدار A_{mn} را بر حسب ضرایب بسط تابع $h(x,y)$ به دست آورید.

....

۹– الف) نشان دهید که تابع گرین عملگر لاپلاس را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$G(\bar{R},\bar{R}')=\frac{1}{4\pi|\bar{R}-\bar{R}'|}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-K_r|z-z'|}}{2k_r}e^{j\bar{K}_r\cdot(\bar{R}-\bar{R}')}d^2K_r$$

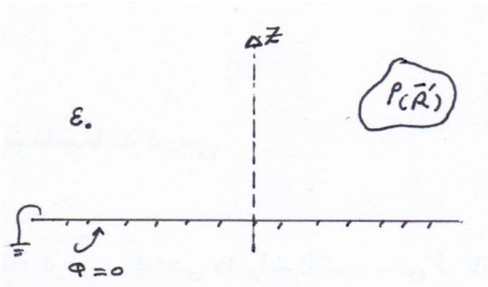
که در آن:

$\bar{K}_r = \hat{x}K_x + \hat{y}K_y$ ، $|\bar{K}_r| = K_r$ و $d^2K_r = dK_x dK_y$.

ب) همچنین نشان دهید که پاسخ معادله لاپلاس: $\nabla^2\psi = 0$ به شکل زیر قابل بیان است:

$$\psi(\bar{R}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A(\bar{K}_r)e^{K_r z} + B(\bar{K}_r)e^{-K_r z}\right]e^{j\bar{K}_r\cdot\bar{R}}d^2K_r$$

پ) اکنون مسأله نیم صفحه $(z>0)$ را که در آن پتانسیل صفحه ی xoy صفر است در نظر می‌گیریم (مطابق شکل روبرو). می‌خواهیم پتانسیل الکتریکی ϕ را به کمک *scattering superposition* بدست آوریم. پتانسیل اولیه در تمام فضا عبارت است از:



$$\varphi^{\rho} = \int_{v'} G^{\rho}(\bar{R},\bar{R}')\frac{\rho(\bar{R}')}{\varepsilon_0}dv'$$

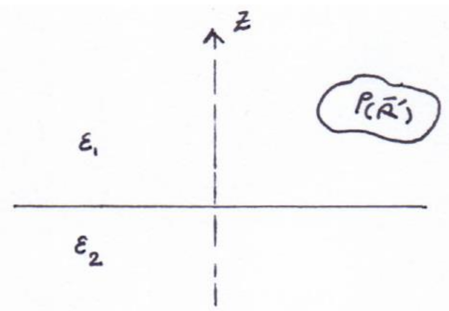
که در آن $G^{\rho}(\bar{R},\bar{R}')$ تابع گرین فرض الف می‌باشد. به کمک پتانسیل ثانویه φ^s و به کمک شرایط مرزی نشان دهید که:

$$\varphi(0,...,z) = \varphi^{\rho} + \varphi^{s} = \int_{v} G(\bar{R},\bar{R}')\frac{\rho(\bar{R}')}{\varepsilon_0}dv'$$

که در آن:

$$G(\bar{R},\bar{R}') = G^{\rho}(\bar{R},\bar{R}') + G^{s}(\bar{R},\bar{R}')\,,\, G^{s} = \frac{-1}{4\pi|\bar{R}-\bar{R}_i'|}\ ,\ \bar{R}_i' = (x',y',-z')$$

۱۰- تابع گرین برای دو ناحیه $z>0$ و $z<0$ با گذردهی های ε_1 و ε_2 مورد نظر است. پتانسیل در محیط ۱ را می توان چنین انتخاب کرد:



$$\varphi_1(x,y,z) = \int_{v'}\left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-K_r|z-z'|}}{2K_r}e^{j\bar{K}_r\cdot(\bar{R}-\bar{R}')}d^2K_r\right]\frac{\rho(\bar{R}')}{\varepsilon_0}dv' + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[B(\bar{K}_r)e^{-K_r z}\right]e^{j\bar{K}_r\cdot\bar{R}}d^2K_r$$

با انتخاب $\varphi_2(x,y,z)$ و بکار بردن شرایط مرزی توابع گرین زیر را نتیجه بگیرید:

$$G_1(\bar{R},\bar{R}') = \frac{1}{4\pi|\bar{R}-\bar{R}'|} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{4\pi|\bar{R}-\bar{R}_i'|},\quad G_2(\bar{R},\bar{R}') = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{4\pi(\bar{R}-\bar{R}')}$$

که در آن:

$$\bar{R}' = \hat{x}x' + \hat{y}y' + \hat{z}z'\ ,\ \bar{R}_i' = \hat{x}x' + \hat{y}y' - \hat{z}z'$$