استان:

دانشگاه پیام‌نور
مرکز آزمون

نیمسال دوم ۸۹-۸۸

کارشناسی ارشد

نام درس: آنالیز عددی پیشرفته

تعداد سؤالات: تستی: --- تشریحی: ۶

رشته تحصیلی ، کُد درس: ریاضی کاربردی(تحقیق در عملیات – آنالیز عددی) (۱۱۱۱۱۸۰)

زمان آزمون: تستی:--- تشریحی: ۱۸۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ◉

کُد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: ماشین حساب مجاز است.

امام علی(ع): شرافت به خرد و ادب است نه به دارایی و نژاد.

سؤال ۱. فرض کنید عدد حقیقی x و عدد صحیح و مثبت بزرگ k مفروض باشد. مقدار $\sin(kx)$ از رابطه بازگشتی زیر محاسبه می‌شود.

$$\sin(kx)=\sin\big((k-1)x\big)\cos x+\cos\big((k-1)x\big)\sin x$$

میزان تأثیر خطاهای کوچک $\varepsilon_c\cos x$ و $\varepsilon_s\sin x$ درهنگام استفاده از $\cos(x)$ و $\sin(x)$ در محاسبه نهایی $\cos(kx)$ و $\sin(kx)$ چقدر است؟

سؤال ۲. ثابت کنید برای هر نقطه از یک تابع جدولی با N نقطه متمایز $(k=0,1,\cdots,N-1)$ (x_k,f_k) که در آن f_k مختلط و $x_k=\frac{2k\pi}{N}$ است، یک چندجمله‌ای منحصربه فرد $p(x)=\beta_0+\beta_1e^{ix}+\cdots+\beta_{N-1}e^{(N-1)ix}$ با شرط $p(x_k)=f_k$ است.

سؤال ۳. الف) فرض کنید

$$B_i^k(x)=\left(\frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i}\right)B_i^{k-1}(x)+\left(\frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_{i+k}}\right)B_{i+1}^{k-1}(x),\qquad k\geq 1$$

توابع B – اسپلاین از درجه k باشند. ثابت کنید:

۱) $$\frac{d}{dx}B_i^k(x)=\left(\frac{k}{t_{i+k}-t_i}\right)B_i^{k-1}(x)-\left(\frac{k}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\right)B_{i+1}^{k-1}(x)\qquad k\geq 2$$

۲) $$\frac{d}{dx}\sum_{i=-\infty}^{\infty}c_iB_i^k(x)=k\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\frac{c_i-c_{i-1}}{t_{i+k}-t_i}\right)B_i^{k-1}(x)\qquad k\geq 2$$

۳) $$\int_{-\infty}^{x}B_i^k(s)ds=\left(\frac{t_{i+k+1}-t_i}{k+1}\right)\sum_{j=i}^{\infty}B_j^{k+1}(x)$$

ب) تابع درونیاب اسپلاین مکعبی $f(x)=x^4$ را با برقراری شرط تناوب برای نقاط $x_k=0/5k$ $(k=0,1,2,3)$ در بازه $[0,1/5]$ بیابید.

سؤال ٤. الف) مفهوم سازگاری در نرم ماتریسی را تعریف نموده و کاربرد آن را در حل دستگاههای معادلات خطی بیان کنید.

ب) نشان دهید اگر $\mathbf{F}$ یک ماتریس $n\times n$ با شرط $\|\mathbf{F}\|<1$ باشد، آنگاه ماتریس $\mathbf{F}+\mathbf{I}$ معکوس پذیر است و داریم :

$$\left\|(\mathbf{I}+\mathbf{F})^{-1}\right\|\leq\frac{1}{1-\|\mathbf{F}\|}.$$

ج) فرض کنید $\mathbf{A}$ یک ماتریس مربعی نامنفرد $n\times n$ و $\mathbf{B}=\mathbf{A}(\mathbf{I}+\mathbf{F})$ که در آن $\mathbf{F}$ ماتریس مربعی با شرط $\|\mathbf{F}\|<1$ است. همچنین $\mathbf{x}$ و $\Delta\mathbf{x}$ را بردارهای n تایی در نظر بگیرید که $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ و $\mathbf{B}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})=\mathbf{b}$.

در این صورت ثابت کنید:

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\leq\frac{\|\mathbf{F}\|}{1-\|\mathbf{F}\|}.$$

۱

نام درس: آنالیز عددی پیشرفته
تعداد سؤالات: تستی: -- **تشریحی:** ۶
رشته تحصیلی ، کُد درس: ریاضی کاربردی(تحقیق در عملیات – آنالیز عددی) (۱۱۱۱۱۸۰)
زمان آزمون: تستی:-- **تشریحی:** ۱۸۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ **ندارد** ◉
کُد سری سؤال: یک (۱) **استفاده از:** ماشین حساب **مجاز است.**

سؤال ۵. با استفاده از چندجمله‌ای های درونیاب هرمیت ثابت کنید در محاسبه تقریبی انتگرال با فرمول گاوسی

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} A_i f(x_i) + E, \qquad \forall f \in C^{2n}[a,b]$$

داریم:

$$E = \frac{f^{2n}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b q^2(x)w(x)dx, \quad a<\xi<b, \quad q(x)=\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i).$$

سؤال ۶. فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n \geq 2$ با ضرایب حقیقی باشد.اگر تمام ریشه‌های ξ_i به صورت $\xi_n \geq \cdots \geq \xi_2 \geq \xi_1$ از معادله $p(x)=0$ حقیقی مقدار باشند، آنگاه ثابت کنید روش نیوتن یک دنباله اکیداً نزولی و همگرا به ξ_1 برای هر مقدار اولیه دلخواه $x_0 > \xi_1$ تولید می‌کند.

موفق باشید.