تعداد سؤالات: تستی: -- تشریحی: ۶ | نام درس: آنالیز عددی پیشرفته

زمان آزمون: تستی: -- تشریحی: ۱۵۰ دقیقه | رشته تحصیلی و کُد درس: ریاضی (۱۱۱۱۱۸۰)

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊛ | --

کُد سری سؤال: یک (۱) | استفاده از: ماشین حساب مجاز است.

امام علی(ع): آنکه پژوهش را استمرار نمی‌بخشد از درک دانش بی‌نصیب است.

بارم سوالات ۱۴ نمره و در اختیار استاد

۱. الف. تابع درونیاب گویا برای داده‌های

x	-1	0	1	2
y	0	5	5	2

بیابید.

ب. چند جمله‌ای درونیاب دو متغیره تابع $f(x,y)$ را برای داده‌های زیر بیابید.

x	-1	0	1	-1	0	1
y	0	0	0	1	1	1
$f(x,y)$	1	1	1	2	1	2

ج. با توجه به داده‌های (ب) برای $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} f(x,y)\,dy\,dx$ از روش دلخواه تقریبی بیابید.

۲. فرض کنید a و b و c سه عدد حقیقی مثبت با نمایش ممیز شناور باشند برای محاسبه $A=a^2+ab+2b^2$ کدام یک از دو الگوریتم زیر قابل اعتمادتر است؟

الف. $A=a(a+b)+2b^2$ ب. $A=a^2+(a+2b)b$

۳. فرض کنید $P(x)=\sum\limits_{j=0}^{N-1}\alpha_j e^{ijx}$ که در آن $i^2=-1$ است.

الف. مقادیر ثابت α_jها را به گونه‌ای بیابید که $P(x)$ درونیاب تابع $f(x)$ متناظر با نقاط $0\le k\le N-1$ $x_k=\dfrac{2k\pi}{N}$ باشد.

ب. ثابت کنید تابع درونیاب فوق یکتاست.

۴. فرض کنید $T_n(x)$ چند جمله‌ای چبیشف که در آن $\varphi(-1)=\varphi(1)=0,\ \varphi(x)=T_{n+1}(x)+aT_n(x)+bT_{n-1}(x)$ می‌باشد. فرض کنید $-1=x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n=1$ ریشه‌های معادله $\varphi(x)=0$ باشند. قرار دهید :

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sum_{i=0}^{n}x_i^k w_i \qquad k=0,1,\dots,n$$

مطلوبست محاسبه درجه دقت فرمول انتگرال‌گیری تقریبی زیر :

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\simeq\sum_{i=0}^{n}w_i f(x_i)$$

نام درس: آنالیز عددی پیشرفته	**تعداد سؤالات: تستی:** -- **تشریحی:** ۶
رشته تحصیلی و کُد درس: ریاضی (۱۱۱۱۱۸۰)	**زمان آزمون: تستی:** -- **تشریحی:** ۱۵۰ دقیقه
--	**آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ◉**
کُد سری سؤال: یک (۱)	**استفاده از:** ماشین حساب **مجاز است.**

۵. فرض کنید $H_{2n+1}(x)$ چند جمله‌ای درونیاب هرمیت تابع $f \in C^{2n+2}[0,1]$ متناظر با نقاط $\underset{0\le i\le n}{x_i \in [0,1]}$ باشد. ثابت کنید

$$|f(x) - H_{2n+1}(x)| \le \frac{M}{(2n+2)!} \quad \text{که} \quad M = \max_{x\in[0,1]} |f^{(2n+2)}(x)|$$

۶. فرض کنید $L_i(x)$ ، $0 \le i \le 2n$ چند جمله‌ای لاگرانژ متناظر با نقاط $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$ در $[a,b]$ باشد. ثابت کنید

$$\exists C \in (a,b) \ni e^C \prod_{j=0}^{2n} x_j = (2n+1)!\left(\sum_{i=0}^{2n} e^{x_i} L_i(0) - 1\right)$$

راهنمایی : از تابع $f(x) = e^x$ می توانید برای حل این مسأله با استفاده از فرمول خطای چند جمله‌ای درونیاب کمک بگیرید.