

امام خمینی^(ره): این محرم و صفر است که اسلام را زنده نگه داشته است.

* توجه: بارم سؤال ۴: ۲ نمره و بقیه سؤالها ۳ نمره می باشد.

۱. الف. به روش کسر مسلسل، تابع درونیاب گویا برای داده‌های زیر به دست آورید: (۳ نمره)

x_i	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	۱
f_i	-۳	-۱	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{7}$	۰

ب. تابع درونیاب اسپلاین طبیعی مکعبی را برای داده‌های زیر روی بازه $[0, 2]$ به دست آورید.

x_i	۰	۱	$\frac{3}{2}$	۲
f_i	۱	۲	۱	۳

۲. الف. فرض کنید $\{p_i\}$ دنباله چند جمله‌ایهای متعامد نسبت به تابع وزن $w(x)$ روی بازه (a, b) باشد و x_1, \dots, x_n نقاط دو به دو متمایز متعلق به (a, b) باشند. نشان دهید برای هر مجموعه از مقادیر y_1, \dots, y_n مسئله

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k p_k(x_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, n \quad \text{درونیاب}$$

جواب منحصر به فرد دارد.

ب. اگر در قسمت الف x_1, \dots, x_n ریشه‌های چند جمله‌ای متعامد $p_n(x)$ باشند و a_1, \dots, a_n جواب دستگاه

$$\sum_{i=1}^n a_i p_k(x_i) = \begin{cases} (p_0, p_0) & , \quad k = 0 \\ 0 & , \quad k = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad \text{معادلات}$$

باشند، ثابت کنید روش انتگرالگیری

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n a_k f(x_k)$$

دقیق از درجه $2n-1$ است. (p_0, p_0) ضرب داخلی p_0 و p_0 است.

۳. فرض کنید تمام ریشه‌های یک چند جمله‌ای $p_n(x)$ از درجه $n \geq 2$ ، حقیقی‌اند. ثابت کنید روش نیوتن با هر مقدار اولیه x_0 در طرف راست بزرگترین ریشه به آن ریشه همگراست.

۴. فرض کنید عدد حقیقی x و عدد صحیح، مثبت و بزرگ k داده شده باشند. برای محاسبه $\sin kx$ و $\cos kx$ از روابط

$$\cos mx = \cos x \cos(m-1)x - \sin x \sin(m-1)x.$$

$$\sin mx = \sin x \cos(m-1)x + \cos x \sin(m-1)x, \quad m = 1, 2, \dots, k$$

بازگشتی

تأثیر خطاهای کوچک $\mathcal{E}_c \cos x$ و $\mathcal{E}_s \sin x$ در محاسبه $\cos x$ و $\sin x$ را بر جوابهای نهائی $\sin kx$ و $\cos kx$ بررسی نمائید.

۵. فرض کنید A ماتریسی نامنفرد و $b \neq 0$ باشد.

الف. اگر x جواب دستگاه $Ax = b$ ، $(x + \Delta x)$ جواب دستگاه $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ باشد، ثابت کنید.

$$\frac{\|\Delta b\|}{\text{cond}(A)\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

ب. اگر x جواب دستگاه $Ax = b$ ، $(x + \Delta x)$ جواب دستگاه $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$ باشد، ثابت کنید

$$\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \quad \text{با فرض آنکه} \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}{(1 - \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|})}$$