

تعداد سوالات: تستی: ۰۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۰۰ تشریحی: ۱۲۰

سری سوال: یک ۱

درس: آنالیز عددی پیشرفته

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات) ۱۱۱۱۸۰

استفاده از ماشین حساب ساده، ماشین حساب مهندسی مجاز است

۲،۸ نمره

۱- تعیین کنید به ازای چه مقادیری از x رابطه ی زیر پایدار است؟

$$Z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

۲،۸ نمره

۲- چند جمله ای درونیاب اسپلاین مکعبی طبیعی $S_{\Delta}(Y, x)$ در بازه $[-1, 1]$ چنان پیدا کنید که نقاط $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ ، $(x_1, y_1) = (0, 2)$ ، $(x_2, y_2) = (1, -1)$ و $(x_3, y_3) = (1, -1)$ را درونیاب کند و همچنین داشته باشیم $S_{\Delta}''(Y, 0) = -6$.

۲،۸ نمره

۳- الف) برای $p = 0, 1, 2, \dots$ (با فرض اینکه برای $p = 1$ داشته باشیم $\rho(x_0, \dots, x_{p-2}) = 0$) ثابت کنید که:

$$\varphi(x_0, \dots, x_p) = \rho(x_0, x_1, \dots, x_p) - \rho(x_0, x_1, \dots, x_{p-2})$$

که در آن $\varphi(x_0, \dots, x_p)$ تفاضل وارون (Inverse Difference) و $\rho(x_0, x_1, \dots, x_p)$ تفاضل متقابل (Reciprocal Difference) است.

ب) درونیاب کسری داده های زیر را بنویسید.

$$(x_0, y_0) = (0, 0), (x_1, y_1) = (1, -1), (x_2, y_2) = (2, -\frac{2}{3}), (x_3, y_3) = (3, 9)$$

۲،۸ نمره

۴- فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n ریشه های n مین چندجمله ای متعامد $p_n(x)$ و اعداد w_1, \dots, w_n جواب دستگاه معادلات نامنفرد زیر باشد.

$$\sum_{i=1}^n P_k(x_i) w_i = \begin{cases} \langle p_0, p_0 \rangle, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

ثابت کنید برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم: $w_i > 0$ و

$$\int_a^b w(x) p(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i p(x_i), \forall p \in \Pi_{2n-1}$$

که در آن Π_{2n-1} شامل چندجمله ایهای حداکثر تا درجه $2n-1$ است.

تعداد سوالات: تستی: ۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۰ تشریحی: ۱۲۰

سری سوال: ۱ یک

درس: آنالیز عددی پیشرفته

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات) ۱۱۱۱۸۰

۲،۸ نمره

۵- فرض کنید $\phi: R^n \rightarrow R^n$ و $x_{i+1} = \phi(x_i), i = 0, 1, \dots$ با $x_0 \in R^n$ و عدد ثابت K و همسایگی

$S_r(x_0) = \{x \mid \|x - x_0\| < r\}$ چنان موجود باشد که:

$$a) \|\phi(x) - \phi(y)\| \leq k \|x - y\|, \forall x, y \in \overline{S_r(x_0)} = \{x \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

$$b) \|x_1 - x_0\| = \|\phi(x_0) - x_0\| \leq (1-K)r < r$$

آن گاه:

الف) برای هر $i = 0, 1, \dots$ نشان دهید که $x_i \in S_r(x_0)$.

ب) تابع $\phi(x)$ در $\overline{S_r(x_0)}$ دقیقاً یک نقطه ثابت ω را دارد و $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \omega$

$$\|x_1 - \omega\| \leq \frac{K^i}{1-K} \|x_i - x_0\|, \|x_{i+1} - \omega\| \leq K \|x_i - \omega\|$$