

تعداد سوالات: تستی: ۰۰ تشریحی: ۷

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۰۰ تشریحی: ۱۴۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: آنالیز عددی پیشرفته

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات) ۱۱۱۱۱۸۰

استفاده از ماشین حساب مهندسی مجاز است

۲۰۰۰ نمره

۱- به روش کسر مسلسل و تفاضلات معکوس، برای داده های زیر یک تابع درونیاب گویا بدست آورید.

x_i	0	1	-1	2	-2
f_i	1	3	$\frac{3}{5}$	3	$\frac{3}{5}$

۲۰۰۰ نمره

۲- فرض کنید $P(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j e^{jix}$ که $i^2 = -1$. ثابتهای β_j را به گونه ای تعیین کنید که برای نقاط

$$P(x_k) = f_k \text{ داشته باشیم: } x_k = \frac{2k\pi}{N}, k = 0, \dots, N-1$$

۲۰۰۰ نمره

۳- فرض کنید $H_{2n-1}(x)$ چندجمله ای درونیاب هرمیت تابع $f \in C^{2n}[a, b]$ در نقاط دوبدو متمایز $x_i \in [a, b], 1 \leq i \leq n$ باشد. ثابت کنید:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \prod_{i=1}^n (x-x_i)^2 w(x)dx, \quad a < \xi < b$$

۲۰۰۰ نمره

۴- فرض کنید انتگرالگیری بر بازه $[0, 1]$ به روش رامبرگ (Romberg) منجر به تولید جدول زیر شده باشد:

$h_0^2 = 1$	$T_{00} = T(h_0)$		
$h_1^2 = \frac{1}{4}$	$T_{10} = T(h_1)$	T_{11}	
$h_2^2 = \frac{1}{16}$	$T_{20} = T(h_2)$	T_{21}	T_{22}

T_{11} معادل با کدامیک از فرمولهای انتگرالگیری نیوتن-کوتز (Newton-Cotes) است. ادعای خود را ثابت نمایید.

تعداد سوالات: تستی: ۰۰ تشریحی: ۷

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۰۰ تشریحی: ۱۴۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز عددی پیشرفته

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات) ۱۱۱۱۸۰

۲۰۰۰ نمره

۵-

فرض کنید $f: R^2 \rightarrow R^2$ با مولفه های $f_1(x, y) = e^x - e^y$, $f_2(x, y) = ex + ey$ باشد. دو گام از الگوریتم تعیین جهت جستجو (Search direction) را برای تعیین تقریبی از ریشه $f=0$ به کمک تابع $h=f^T f$ و بردار آغازین

$x_0 = (1, 1)^T$ محاسبه کنید. (از $d_k = Df(x_k)^{-1} f(x_k)$ برای تعیین جهت جستجو و نرم برداری

$$\|r\| = \max |r_s| \text{ و نرم ماتریسی } \|A\| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \text{ استفاده کنید.}$$

۲۰۰۰ نمره

۶- الف) دنباله اشتورم (Sturm Sequence) را برای چند جمله ای $P(x)$ تعریف کنید.

ب) ثابت کنید تعداد ریشه های حقیقی چند جمله ای $P(x) \equiv P_0(x)$ در بازه $[a, b]$ برابر با $w(b) - w(a)$ است که $w(x)$ تعداد تغییر علامتها در جملات متوالی دنباله اشتورم $P_0(x), \dots, P_m(x)$ در x است.

۲۰۰۰ نمره

۷- فرض کنید عدد حقیقی x و عدد صحیح و مثبت k مفروض باشد. اگر $\sin(kx)$ و $\cos(kx)$ از روابط بازگشتی

$$\sin mx = \sin x \cos(m-1)x + \cos x \sin(m-1)x, \quad m = 1, 2, \dots, k$$

$$\cos mx = \cos x \cos(m-1)x - \sin x \sin(m-1)x$$

محاسبه شوند، میزان تاثیر خطاهای کوچک $\mathcal{E}_c \cos(x)$ و $\mathcal{E}_c \sin(x)$ هنگام محاسبه $\cos(x)$ و $\sin(x)$ در جوابهای نهایی $\cos(kx)$ و $\sin(kx)$ چقدر است؟