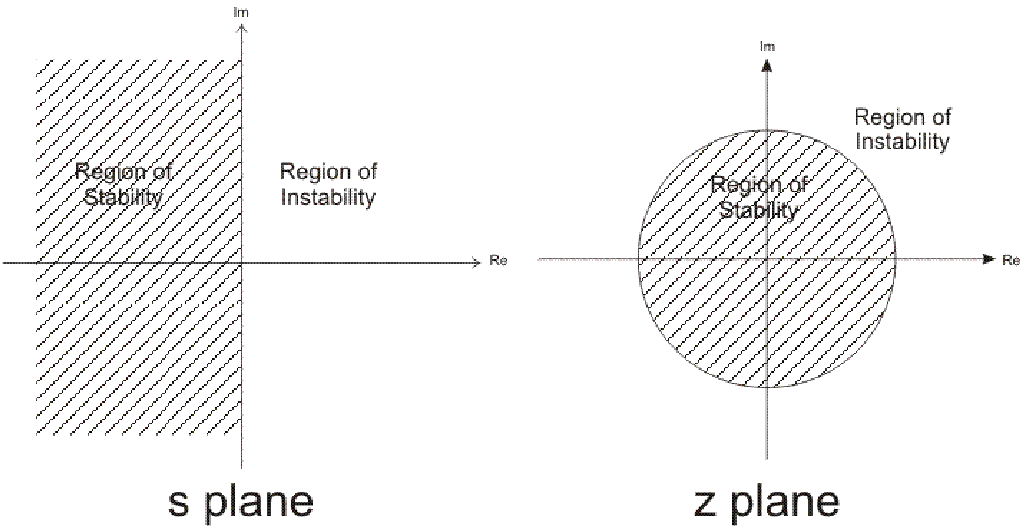
ضمیمه : روش های گسسته سازی

1) دوخطی / تاستین (Tustin / Bilinear)

$$\boxed{s = \frac{2}{T} * \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

پرکاربردترین روش گسسته سازی، تاستین می باشد که تا فرکانس های بالاتری رفتار مشابه تابع پیوسته از خود نشان می دهد.

این روش نیم صفحه ی سمت چپ صفحه لاپلاس را به درون دایره ی واحد نگاشت می کند



ضمیمه : روش های گسسته سازی

2) پاسخ ضربه نامتغیر (**Impulse Invariance**)

از پرکاربردترین روش های گسسته سازی می باشد که در حوزه ی فرکانس رفتار تابع پیوسته را حفظ می کند اما در حوزه زمان ممکن است تفاوت هایی دیده شود.

مراحل:

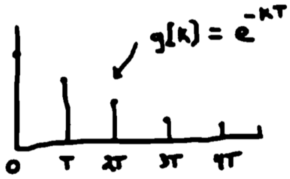
1) محاسبه پاسخ ضربه سیستم پیوسته در حوزه زمان
2) نمونه برداری با نرخ T از تابع پیوسته پاسخ ضربه و تبدیل آن به گسسته
3) محاسبه تبدیل Z تابع
4) افزودن گین با مقدار T به تابع

Continuous controller

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = g(t) = e^{-t}$$

Impulse response

→ Sample every T seconds



→ Take z transform

$$\mathcal{Z}(g[k]) = G(z) = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

If $T = 0.1$ seconds, then $G(z) = \dfrac{z}{z - 0.9048} \xrightarrow{\text{Impulse}} \dfrac{0.1z}{z - 0.9048}$

3) تفاضل مستقیم و تفاضل معکوس(Forward difference & Backward difference)

اصول این دو روش مشابه یکدیگر و اصل انتگرال گیری است. روش تفاضل مستقیم ممکن است در برخی سیستم ها باعث ناپایداری شود و روش تفضل معکوس در فرکانس های کم کاربردی است به همین دلیل این دو روش امروزه برای گسسته سازی از محبوبیت کمتری برخوردارند.

$$\boxed{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

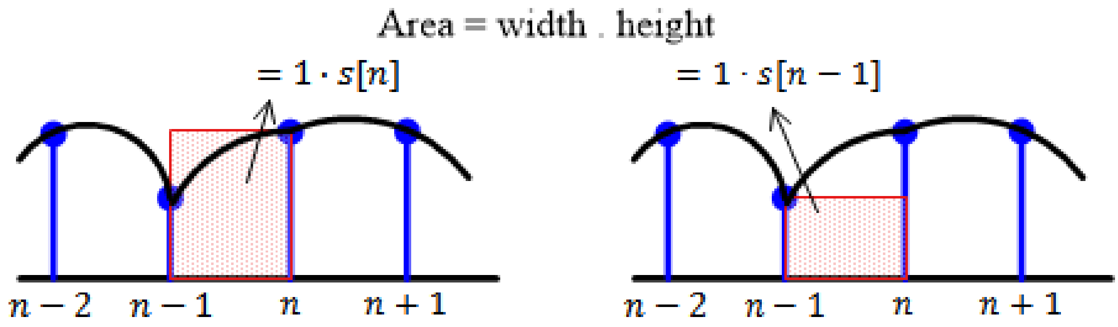
$$\boxed{s = \frac{1 - z^{-1}}{Tz^{-1}}}$$

Forward difference

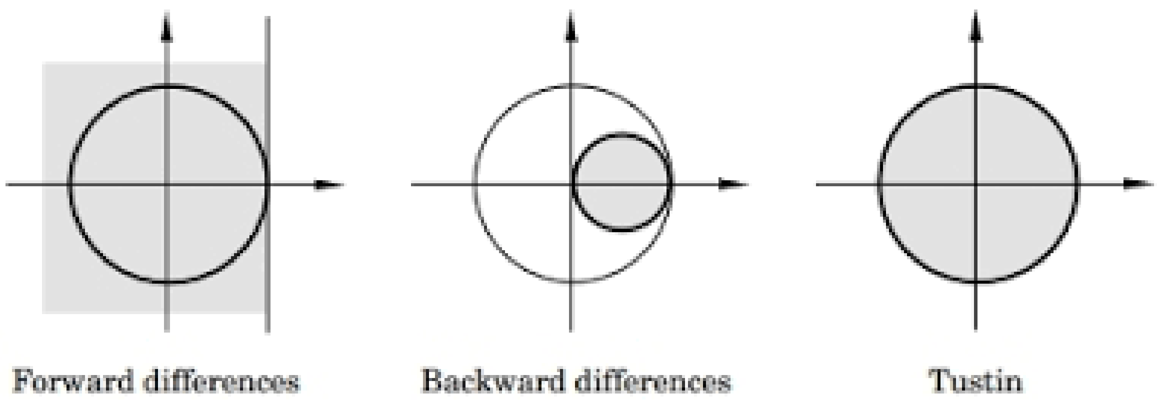
$$r[n] = r[n-1] + s[n]$$

Backward difference

$$r[n] = r[n-1] + s[n-1]$$



نحوه نگاشت به صفحه Z



4) منطبق (Matched)

این روش پاسخ پله ی مشابه سیستم پیوسته دارد و در زمان های نمونه برداری دقیقا با مقدار پیوسته یکسان است اما در مقابل ورودی های دیگر شباهت خاصی در حوزه زمان و یا فرکانس به سیستم پیوسته ندارد. در نتیجه استفاده از این روش بسیار محدود است.

مراحل:

1) هر کدام از قطب ها و صفر ها را به قطب و صفر معادل در z نگاشت کنید

$$z = e^{sT}$$

2) به تابع بدست آمده تا strictly proper شدن صفر و قطب در بینهایت (z-1) اضافه کنید
3) با افزودن یک گین به تابع گسسته بدست آمده، گین DC آن را با حالت پیوسته یکسان کنید (برای بدست آوردن گین DC، در توابع s=0 و z=1 قرار دهید)

$$G(s) = \frac{3}{s^2+3s+2}$$

1

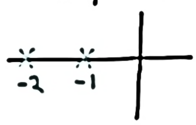
For T = 1 second

$s=-1, \quad z = e^{-1} = 0.3679$

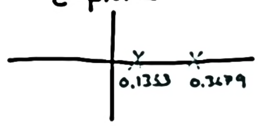
$s=-2, \quad z = e^{-2} = 0.1353$

$$\boxed{G(z) = \frac{1}{(z-0.3679)(z-0.1353)}}$$

s-plane



z-plane



$z = e^{sT}$ ← Sample time of discrete system

2

Solve for this

$$\text{DCgain}\left(\frac{3}{s^2+3s+2}\right) = \text{DCgain}\left(\frac{(z+1)}{(z-0.3679)(z-0.1353)} \cdot K\right)$$

Set s to 0

Set z to 1

3

$$\frac{3}{2} = \frac{2}{0.6321 \cdot 0.8647} \cdot K \quad \Rightarrow \quad K = 0.4099$$