زمانبندی حرکت قطارها با استفاده از مدل ریاضی

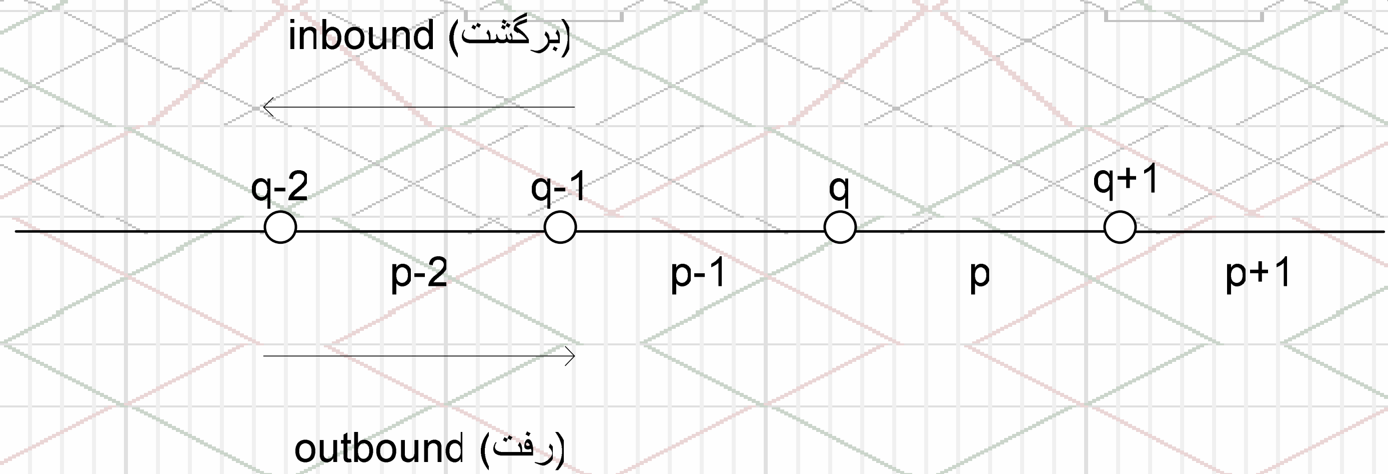
مدرس: دکتر مسعود یقینی

- این مدل توسط Higgins در سال ۱۹۹۶ ارائه شده است.

- این مدل برای شبکه یک خطه، دوخطه و ترکیبی از یک خطه و دو خطه قابل استفاده است.

- مدل برای راه‌آهن استرالیا ارائه شده است.

• شبکه:



• p: بلاکها (یک خطه یا دو خطه)
• q: ایستگاههای تلاقی و سبقت
• قطارهای برگشت

I=1,2,…,m

• قطارهای رفت

I=m+1,m+2,…,N

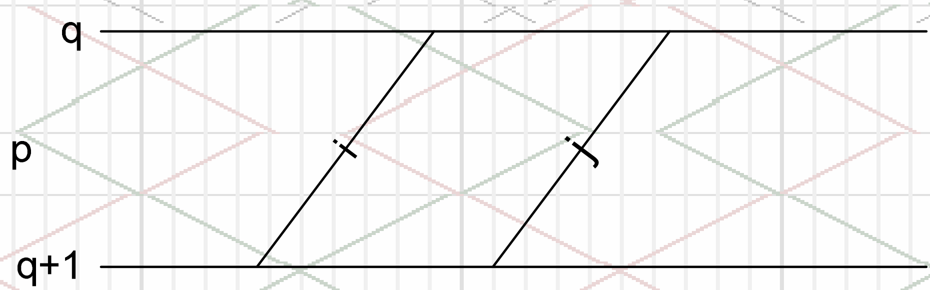
گروه اول متغیر های تصمیم:

- متغیر های عدد صحیحی که تعیین می کند کدام قطار اول از بلاک عبور کند.

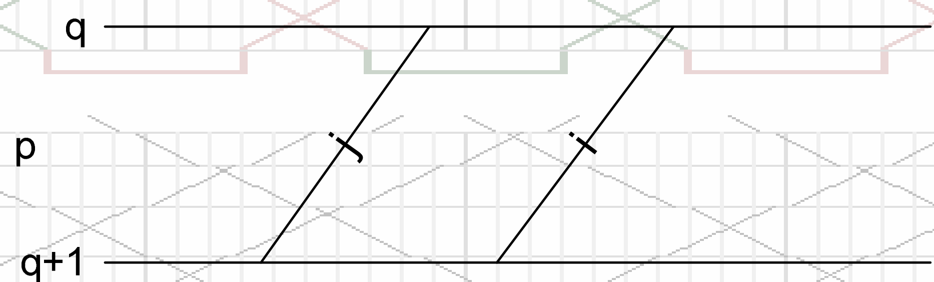
A_{ijp}

1: اگر قطار برگشت i ام $(i \le m)$ قبل از قطار برگشت j ام $(j \le m)$ از بلاک p ام عبور کند .

0: در غیر این صورت



$A_{ijp}=1$

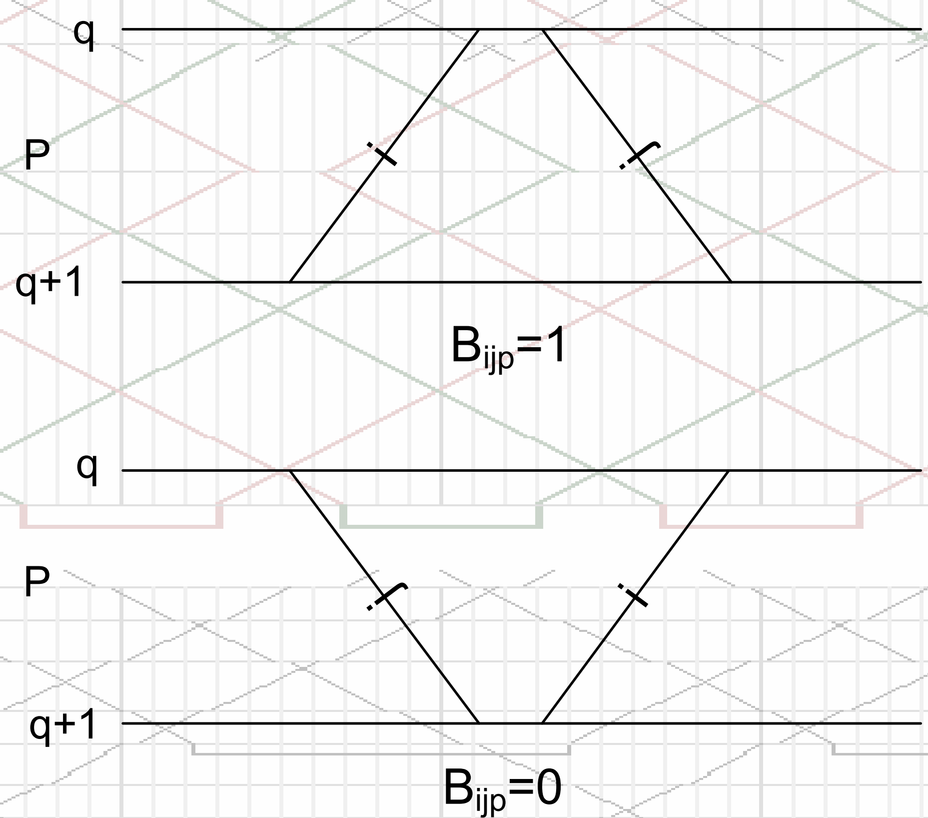


$A_{ijp}=0$

B_{ijp}

1: اگر قطار برگشت i ام $(i \le m)$ قبل از قطار رفت j ام $(j > m)$ از بلاک p ام عبور کند.

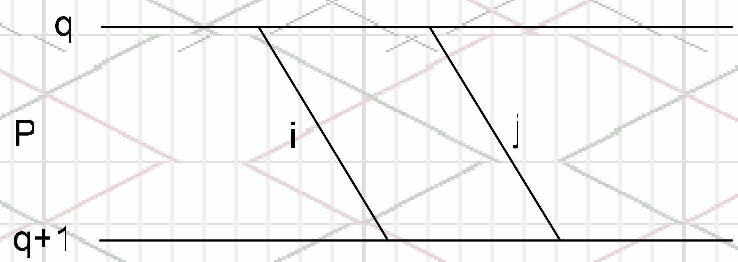
0: در غیر این صورت



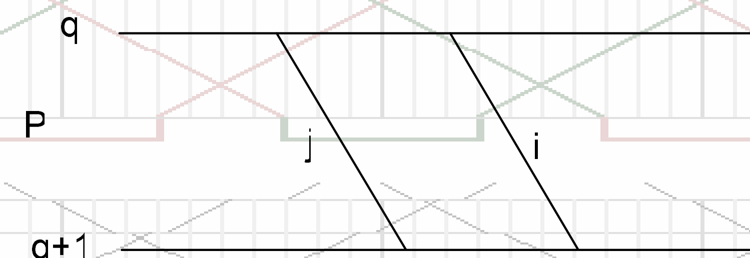
C_{ijp}

1: اگر قطار رفت i ام $(i>m)$ قبل از قطار رفت j ام $(j>m)$ از بلاک p ام عبور کند.

0: در غیر این صورت



$C_{ijp}=1$



Cijp=0

گروه دوم متغیر های تصمیم گیری:

متغیر های تصمیم گیری که زمان ورود و خروج قطارها را به ایستگاهها مشخص می کنند:

x_{aq}^{i}: زمان ورود قطار iام $(i \in I)$ به ایستگاه q ام $(q \in Q)$

x_{dq}^{i}: زمان اعزام قطار iام $(i \in I)$ از ایستگاه q ام $(q \in Q)$

x_{Oi}^{i}: زمان اعزام قطار iام $(i \in I)$ از ایستگاه مبداء

x_{Di}^{i}: زمان ورود قطار iام $(i \in I)$ به ایستگاه مقصد

پارامترهای ورودی:

h_p: حداقل فاصله اعزام دو قطار در بلاک pام

d_p: طول بلاک pام

y^i_{Oi}: زودترین زمان ممکنه اعزام قطار iام از ایستگاه مبداء آن

y^i_{Di}: دیرترین زمان ممکنه ورود قطار iام به ایستگاه مقصدش

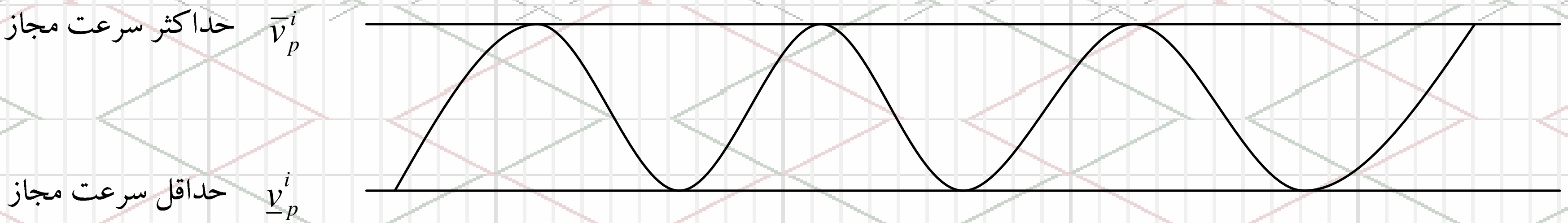
$\underline{v}^i_p$: حداقل سرعت مجاز قطار iام در بلاک pام

$\overline{v}^i_p$: حداکثر سرعت مجاز قطار iام در بلاک pام

w_i: اولویت (وزن) قطار iام

s^i_q: زمان توقف برنامه ریزی شده برای قطار iام در ایستگاه qام

- حداقل و حداکثر سرعت در بلاک:



تابع هدف:

- هدف مدل کمینه کردن مجموع زمان تأخیرات قطارها است.

$$\min \sum_i w_i \quad \times \quad (\text{مجموع تأخیرات قطار } i \text{ ام})$$

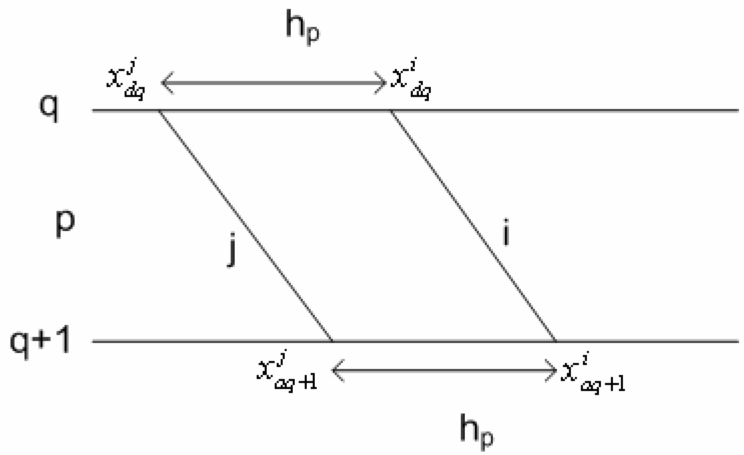
- مجموع تأخیرات قطار iام : شامل مجموع تاخیرات در ایستگاهها می شود. البته زمان توقف برنامه ای جزء تاخیرات محسوب نمی شود.

محدودیت ۱: رعایت حداقل فواصل زمانی قطارها (Headway) در اعزام قطارها در یک مسیر

- اگر قطار jام اول ایستگاه qام را ترک کند و وارد بلاک pام شود، حداقل فاصله زمانی برای اینکه قطار iام پس از قطار jام ایستگاه qام را ترک و وارد بلاک pام شود باید راعایت گردد (h_p).

- و یا حداقل فاصله زمانی رسیدن قطار iام بعد از قطار jام به ایستگاه q+1نیز باید رعایت شود. (h_p).

- محدودیت ۱: رعایت حداقل فواصل زمانی قطارها (Headway) در اعزام قطارها در یک مسیر



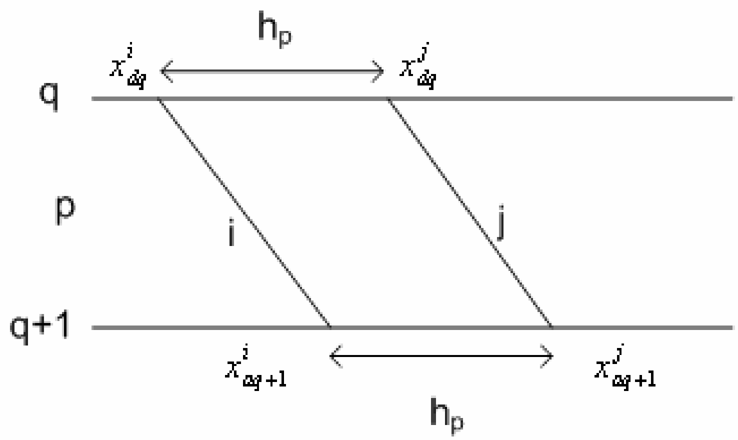
$$M.C_{ijp} + x^i_{aq+1} \geq x^j_{aq+1} + h_p$$

$$M.C_{ijp} + x^i_{dq} \geq x^j_{dq} + h_p$$

$$\forall p \in P, i, j > m$$

- Cijp=0 : اگر قطار jام اول از بلاک عبور کند.
- Cijp=1 : اگر قطار iام اول از بلاک عبور کند، بنابراین خود بخود این شرطها بی اثر می شوند.

محدودیت ۲ : اگر قطار iام اول ایستگاه qام را ترک کند.



$$M(1-C_{ijp})+x^{j}_{aq+1} \geq x^{i}_{aq+1}+h_p$$

$$M(1-C_{ijp})+x^{j}_{dq} \geq x^{i}_{dq}+h_p$$

$$\forall p \in P, i, j > m$$

- Cijp=0 : اگر قطار jام اول از بلاک عبور کند و این شرطها بی اثر می شوند.
- Cijp=1 : اگر قطار iام اول از بلاک عبور کند و این شرطها عمل می کنند.

- محدودیت ۳ : برای قطارهای برگشتی -اگر قطار jام اول ایستگاه q+1ام را ترک کند:

$$M.A_{ijp} + x^{i}_{aq} \geq x^{j}_{aq} + h_p$$

$$M.A_{ijp} + x^{i}_{dq+1} \geq x^{j}_{dq+1} + h_p$$

$$\forall p \in P, i, j \leq m$$

- Aijp=0 : اگر قطار jام اول از بلاک عبور کند.
- Aijp=1 : اگر قطار iام اول از بلاک عبور کند. (محدودیتها بی اثر می شوند)

- **محدودیت ۴** : برای قطارهای برگشتی -اگر قطار iام اول ایستگاه q+1ام را ترک کند:

$$M(1-A_{ijp})+x_{aq}^{j} \geq x_{aq}^{i}+h_{p}$$

$$M(1-A_{ijp})+x_{dq+1}^{j} \geq x_{dq+1}^{i}+h_{p}$$

$$\forall p \in P, i, j \leq m$$

- Aijp=0 : اگر قطار jام اول از بلاک عبور کند.
- Aijp=1 : اگر قطار iام اول از بلاک عبور کند.

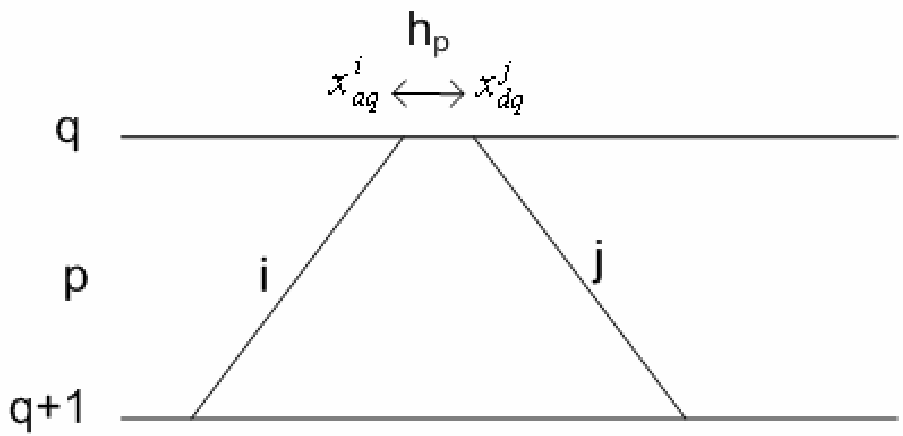
محدودیت ۵: رعایت فواصل زمانی اعزام و قبول قطارهای با جهات مخالف:

$$h_p + x^{j}_{aq+1} \le x^{i}_{dq+1} + M.B_{ijp}$$

$$h_p + x^{i}_{aq} \le x^{j}_{dq} + M.(1 - B_{ijp})$$

$$\forall p \in P, i \le m, j > m$$

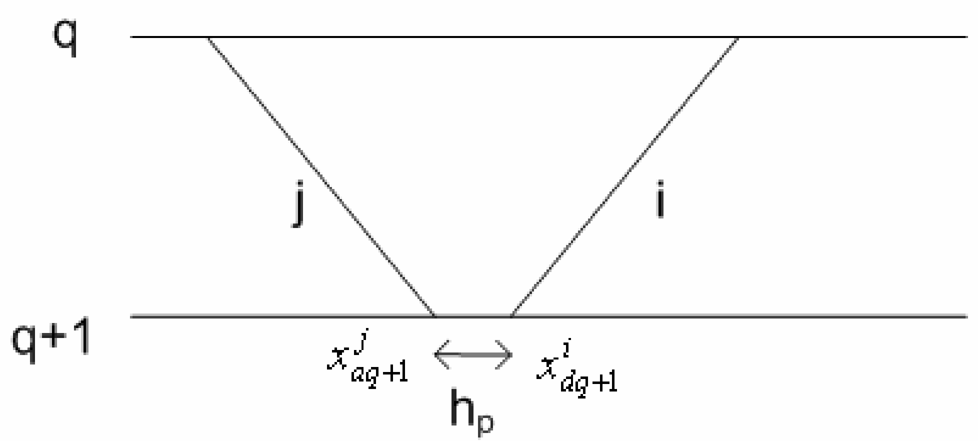
- $B_{ijp}=1$: اگر قطار **i** ام اول از بلاک عبور کند. محدودیت اول بی اثر و محدودیت دوم عمل می کند.



$$h_p + x^j_{aq+1} \le x^i_{dq+1} + M$$

$$h_p + x^i_{aq} \le x^j_{dq}$$

• Bijp=0 : اگر قطار j زام اول از بلاک عبور کند. محدودیت اول فعال و محدودیت دوم بی اثر می شود.



$$h_p + x_{aq+1}^{j} \le x_{dq+1}^{i}$$

$$h_p + x_{dq}^{i} \le x_{dq}^{j} + M$$

محدودیت ۶: حداقل و حداکثر سرعت در بلاک

برای قطارهای رفت:

$$\frac{d_p}{\overline{v}_p^i} \leq x_{aq+1}^i - x_{dq}^i \leq \frac{d_p}{\underline{v}_p^i}$$

$$\forall i > m, p \in P$$

برای قطارهای برگشت:

$$\frac{d_p}{\overline{v}_p^i} \leq x_{aq}^i - x_{dq+1}^i \leq \frac{d_p}{\underline{v}_p^i}$$

$$\forall i \leq m, p \in P$$

$\frac{d_p}{\overline{v}_p^i}$: کوتاه ترین زمان سیر در بلاک، $\frac{d_p}{\underline{v}_p^i}$: طولانی ترین زمان سیر در بلاک

$x_{aq+1}^i - x_{dq}^i$: زمان سیر در بلاک

محدودیت ۷: برای جلوگیری از اعزام قطارها قبل از زودترین زمان مجاز اعزام:

$$x_{Oi}^{i} \geq y_{Oi}^{i}$$

محدودیت ۸: برای جلوگیری از اعزام قطار قبل از رسیدن به ایستگاه و توقف به اندازه توقف برنامه ریزی شده:

$$x_{aq}^{i} + s_{q}^{i} \leq x_{dq}^{i}$$

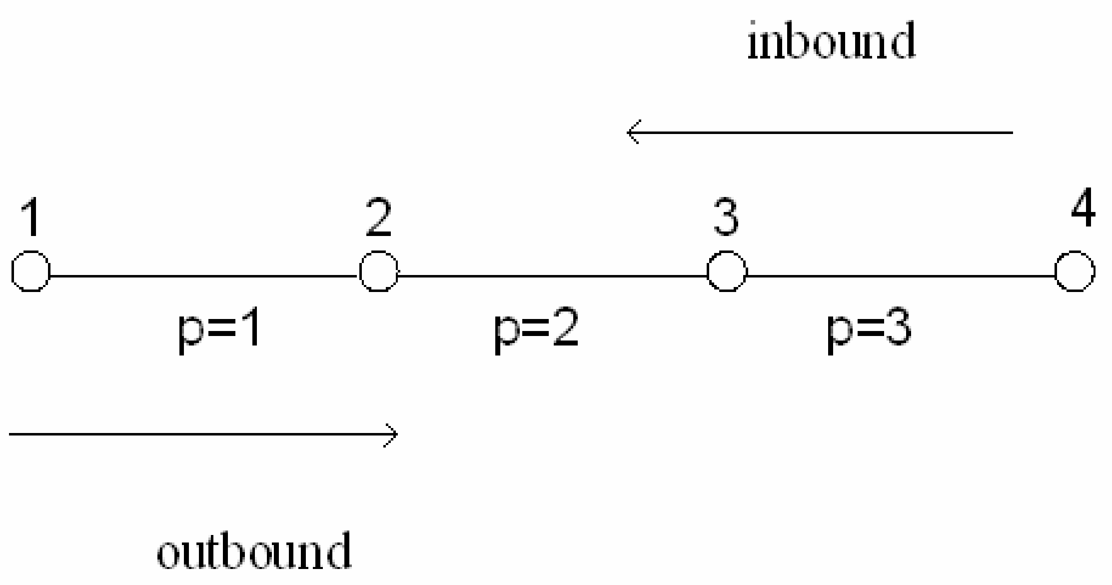
مثال ۱: با فرض یک خطه بودن کلیه بلاکها

مثال 1:

صورت مسئله :

این مدل دارای چهار ایستگاه (1،2،3،4) و 5 قطار با اولویت‌های مختلف می‌باشد. جدول اعزام قطارها بشرح زیر است:

شماره قطار	اولویت قطار	مبدا	مقصد	زودترین زمان اعزام از مبدا	دیرترین زمان رسیدن به مقصد	زمان سیر در بلاک 1	زمان سیر در بلاک 2	زمان سیر در بلاک 3	زمان توقف برنامه ای	
									ایستگاه 2	ایستگاه 3
1	1	4	1	1:00	2:30	15	15	20	10	15
2	1	4	2	1:50	2:45		15	20		10
3	1	1	4	1:20	3:00	20	17	20	10	20
4	2	1	4	1:50	2:30	13	13	14	0	0
5	1	1	3	2:26	3:00	20	17		10	



فرضیات مدل:

۱) در این مسئله سرعت قطارها در بلاک‌ها ثابت فرض شده است.

۲) زمان آزاد سازی بلاک برای قطارهای هم جهت ۵ دقیقه و برای قطارهای غیر هم جهت ۴ دقیقه فرض شده است.

۳) تاخیرات برنامه ای در محدودیت شماره ۸ لحاظ شده است.

تابع هدف:

$$\min = (x^1_{d3} - x^1_{a3} - 15) + (x^1_{d2} - x^1_{a2} - 10) + (x^2_{d3} - x^2_{a3} - 10) + (x^3_{d2} - x^3_{a2} - 10)$$
$$+ (x^3_{d3} - x^3_{a3} - 20) + 4(x^4_{a2} - x^4_{a2}) + 4*(x^4_{d3} - x^4_{a3}) + (x^5_{d2} - x^5_{a2} - 10)$$
$$+ (x^1_{a1} - 150) + (x^2_{a2} - 165) + (x^3_{a4} - 180) + 4*(x^4_{a4} - 150) + (x^5_{a3} - 180)$$

محدودیت ۱ و ۲: رعایت حداقل فواصل زمانی قطارهادر اعزام قطارها در مسیر رفت

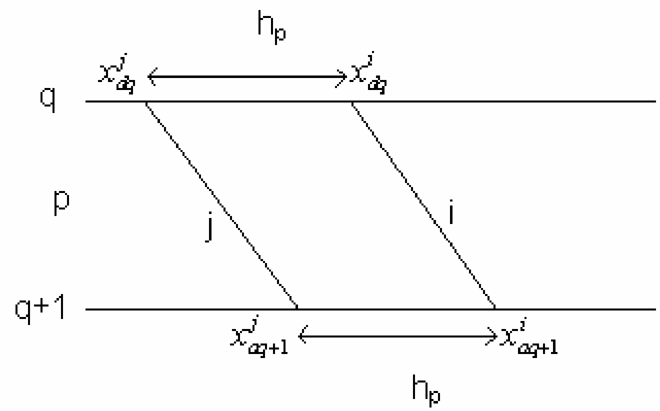
<table>
<tr>
<td>

$$M.C_{ijp}+x^{i}_{aq+1}\geq x^{j}_{aq+1}+h_{p}$$

$$M.C_{ijp}+x^{i}_{dq}\geq x^{j}_{dq}+h_{p}$$

$$\forall p\in P, i, j>m$$

</td>
<td>



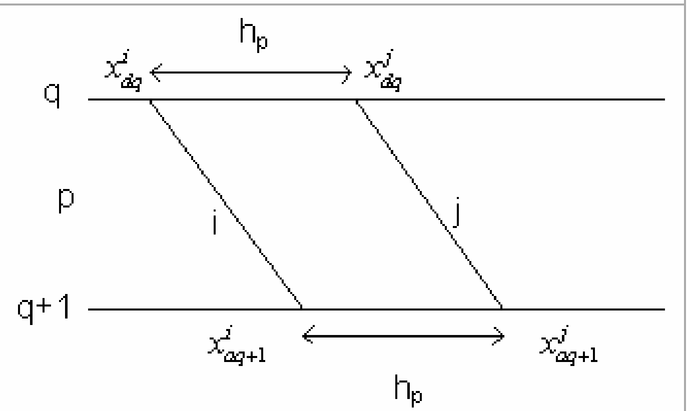
</td>
</tr>
<tr>
<td>

$$M(1-C_{ijp})+x^{j}_{aq+1}\geq x^{i}_{aq+1}+h_{p}$$

$$M(1-C_{ijp})+x^{j}_{dq}\geq x^{i}_{dq}+h_{p}$$

$$\forall p\in P, i, j>m$$

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

$C_{ijp}=0$: اگر قطار **j**ام اول از بلاک عبور کند.

$C_{ijp}=1$: اگر قطار **i**ام اول از بلاک عبور کند.

</td>
</tr>
</table>

برای بلاک اول (بین ایستگاه ۱ و ۲) – قطار ۳ و ۴ :

$$1000^* C_{341} + x_{d1}^3 \geq x_{d1}^4 + 18$$

$$1000^* C_{341} + x_{a2}^3 \geq x_{a2}^4 + 25$$

$$1000^* (1 - C_{341}) + x_{d1}^4 \geq x_{d1}^3 + 25$$

$$1000^* (1 - C_{341}) + x_{a2}^4 \geq x_{a2}^3 + 18$$

اگر مقدار متغیر C_{341} برابر یک شود: قطار ۳ از قطار ۴ زودتر از بلاک عبور می کند.

اگر مقدار متغیر C_{341} برابر صفر شود: قطار ۴ از قطار ۳ زودتر از بلاک عبور می کند.

برای بلاک اول (بین ایستگاه ۱ و ۲) – قطار ۳ و ۵:

$$1000 * C_{351} + x_{d1}^{3} \geq x_{d1}^{5} + 25$$

$$1000 * C_{351} + x_{a2}^{3} \geq x_{a2}^{5} + 25$$

$$1000 * (1 - C_{351}) + x_{d1}^{5} \geq x_{d1}^{3} + 25$$

$$1000 * (1 - C_{351}) + x_{a2}^{5} \geq x_{a2}^{3} + 25$$

برای بلاک اول (بین ایستگاه ۱ و ۲) – قطار ۴ و ۵:

$$1000*C_{451}+x_{d1}^{4}\geq x_{d1}^{5}+25$$

$$1000*C_{451}+x_{a2}^{4}\geq x_{a2}^{5}+18$$

$$1000*(1-C_{451})+x_{d1}^{5}\geq x_{d1}^{4}+18$$

$$1000*(1-C_{451})+x_{a2}^{5}\geq x_{a2}^{4}+25$$

برای بلاک دوم – قطار ۳ و ۴:

$$1000^* C_{342} + x_{d2}^{3} \geq x_{d2}^{4} + 18$$

$$1000^* C_{342} + x_{a3}^{3} \geq x_{a3}^{4} + 22$$

$$1000^* (1 - C_{342}) + x_{d2}^{4} \geq x_{d2}^{3} + 22$$

$$1000^* (1 - C_{342}) + x_{a3}^{4} \geq x_{a3}^{3} + 18$$

برای بلاک دوم – قطار ۳ و ۵:

$$1000 * C_{352} + x_{d2}^{3} \geq x_{d2}^{5} + 22$$

$$1000 * C_{352} + x_{a3}^{3} \geq x_{a3}^{5} + 22$$

$$1000 * (1 - C_{352}) + x_{d2}^{5} \geq x_{d2}^{3} + 22$$

$$1000 * (1 - C_{352}) + x_{a3}^{5} \geq x_{a3}^{3} + 22$$

برای بلاک سوم – قطار ۳ و ۴:

$$1000 * C_{343} + x_{d3}^{3} \geq x_{d3}^{4} + 19$$

$$1000 * C_{343} + x_{a4}^{3} \geq x_{a4}^{4} + 25$$

$$1000 * (1 - C_{343}) + x_{d3}^{4} \geq x_{d3}^{3} + 25$$

$$1000 * (1 - C_{343}) + x_{a4}^{4} \geq x_{a4}^{3} + 19$$

محدودیت ۳ و ۴: رعایت حداقل فواصل زمانی قطارها در مسیر برگشت

$$M.A_{ijp}+x_{aq}^{i}\geq x_{aq}^{j}+h_{p}$$

$$M.A_{ijp}+x_{dq+1}^{i}\geq x_{dq+1}^{j}+h_{p}$$

$$\forall p\in P,i,j\leq m$$

$$M(1-A_{ijp})+x_{aq}^{j}\geq x_{aq}^{i}+h_{p}$$

$$M(1-A_{ijp})+x_{dq+1}^{j}\geq x_{dq+1}^{i}+h_{p}$$

$$\forall p\in P,i,j\leq m$$

$A_{ijp}=0$: اگر قطار **j** ام اول از بلاک عبور کند.

$A_{ijp}=1$: اگر قطار **i** ام اول از بلاک عبور کند.

برای بلاک اول:

هیچ در قطار برگشت نداریم که بخواهیم حداقل فاصله زمانی برای برگشت آنها را کنترل کنیم.

برای بلاک دوم – قطار ۱ و ۲:

$$1000 * A_{122} + x_{d3}^{1} \geq x_{d3}^{2} + 20$$

$$1000 * A_{122} + x_{a2}^{1} \geq x_{a2}^{2} + 20$$

$$1000 * (1 - A_{122}) + x_{d3}^{2} \geq x_{d3}^{1} + 20$$

$$1000 * (1 - A_{122}) + x_{a2}^{2} \geq x_{a2}^{1} + 20$$

برای بلاک سوم – قطار ۱ و ۲:

$$1000 * A_{123} + x_{d4}^{1} \geq x_{d4}^{2} + 25$$

$$1000 * A_{123} + x_{a3}^{1} \geq x_{a3}^{2} + 25$$

$$1000 * (1 - A_{123}) + x_{d4}^{2} \geq x_{d4}^{1} + 25$$

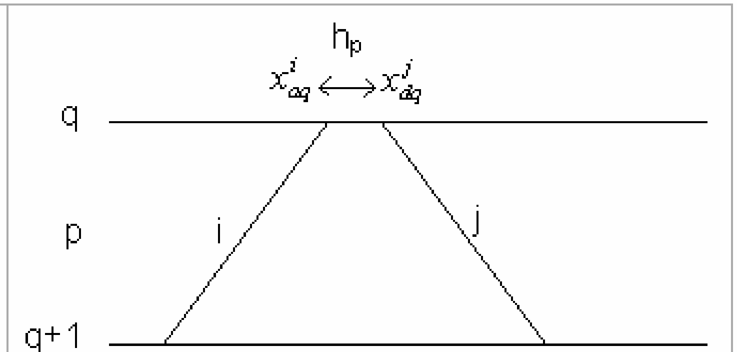
$$1000 * (1 - A_{123}) + x_{a3}^{2} \geq x_{a3}^{1} + 25$$

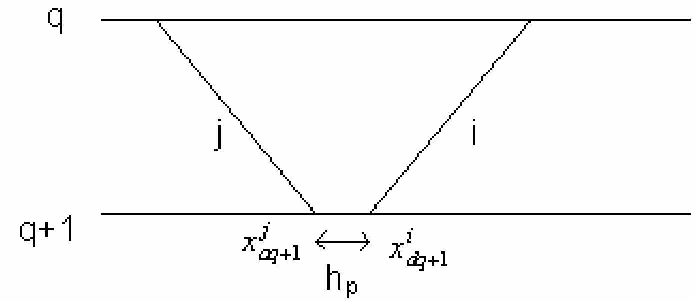
محدودیت ۵: رعایت فواصل زمانی اعزام و قبول قطارهای با جهات مخالف

$$h_p + x^{j}_{aq+1} \le x^{i}_{dq+1} + M.B_{ijp}$$

$$h_p + x^{i}_{aq} \le x^{j}_{dq} + M.(1 - B_{ijp})$$

$$\forall p \in P, i \le m, j > m$$





$B_{ijp} = \mathbf{1}$: اگر قطار **i**ام اول از بلاک عبور کند.

$B_{ijp} = \mathbf{0}$: اگر قطار **j**ام اول از بلاک عبور کند.

برای بلاک اول – قطار رفت ۳ و قطار برگشت ۱:

$$4 + x_{a2}^{3} \le x_{d2}^{1} + 1000 * B_{131}$$

$$4 + x_{a1}^{1} \le x_{d1}^{3} + 1000 * (1 - B_{131})$$

برای بلاک اول – قطار رفت ۴ و قطار برگشت ۱:

$$4 + x_{a2}^{4} \le x_{d2}^{1} + 1000 * B_{141}$$

$$4 + x_{a1}^{1} \le x_{d1}^{4} + 1000 * (1 - B_{141})$$

برای بلاک اول – قطار رفت ۵ و قطار برگشت ۱:

$$4 + x_{a2}^{5} \le x_{d2}^{1} + 1000 * B_{151}$$

$$4 + x_{a1}^{1} \le x_{d1}^{5} + 1000 * (1 - B_{151})$$

برای بلاک دوم–قطار رفت ۳ و قطار برگشت ۱:

$$4 + x_{a3}^{3} \le x_{d3}^{1} + 1000 * B_{132}$$

$$4 + x_{a2}^{1} \le x_{d2}^{3} + 1000 * (1 - B_{132})$$

برای بلاک دوم–قطار رفت ۴ و قطار برگشت ۱:

$$4 + x_{a3}^{4} \le x_{d3}^{1} + 1000 * B_{142}$$

$$4 + x_{a2}^{1} \le x_{d2}^{4} + 1000 * (1 - B_{142})$$

برای بلاک دوم–قطار رفت ۵ و قطار برگشت ۱:

$$4 + x_{a3}^{5} \le x_{d3}^{1} + 1000 * B_{152}$$

$$4 + x_{a2}^{1} \le x_{d2}^{5} + 1000 * (1 - B_{152})$$

برای بلاک دوم–قطار رفت ۳ و قطار برگشت ۲:

$$4 + x_{a3}^{3} \le x_{d3}^{2} + 1000 * B_{232}$$

$$4 + x_{a2}^{2} \le x_{d2}^{3} + 1000 * (1 - B_{232})$$

برای بلاک دوم–قطار رفت ۴ و قطار برگشت ۲:

$$4 + x_{a3}^{4} \le x_{d3}^{2} + 1000 * B_{242}$$

$$4 + x_{a2}^{2} \le x_{d2}^{4} + 1000 * (1 - B_{242})$$

برای بلاک دوم–قطار رفت ۵ و قطار برگشت ۲:

$$4 + x_{a3}^{5} \le x_{d3}^{2} + 1000 * B_{252}$$

$$4 + x_{a2}^{2} \le x_{d2}^{5} + 1000 * (1 - B_{252})$$

برای بلاک سوم– قطار رفت ۳ و قطار برگشت ۱:

$$4 + x_{a4}^{3} \le x_{d4}^{1} + 1000 * B_{133}$$

$$4 + x_{a3}^{1} \le x_{d3}^{3} + 1000 * (1 - B_{133})$$

برای بلاک سوم– قطار رفت ۴ و قطار برگشت ۱:

$$4 + x_{a4}^{4} \le x_{d4}^{1} + 1000 * B_{143}$$

$$4 + x_{a3}^{1} \le x_{d3}^{4} + 1000 * (1 - B_{143})$$

برای بلاک سوم– قطار رفت ۳ و قطار برگشت ۲:

$$4 + x_{a4}^{3} \le x_{d4}^{2} + 1000 * B_{233}$$

$$4 + x_{a3}^{2} \le x_{d3}^{3} + 1000 * (1 - B_{233})$$

برای بلاک سوم– قطار رفت ۴ و قطار برگشت ۲:

$$4 + x_{a4}^{4} \le x_{d4}^{2} + 1000 * B_{243}$$

$$4 + x_{a3}^{2} \le x_{d3}^{4} + 1000 * (1 - B_{243})$$

محدودیت ۶: حداقل و حداکثر سرعت در بلاک

برای قطارهای رفت:

$$\frac{d_p}{\bar{v}_p^i} \le x_{aq+1}^i - x_{dq}^i \le \frac{d_p}{\underline{v}_p^i}$$

$$\forall i > m,\ p \in P$$

برای قطارهای برگشت:

$$\frac{d_p}{\bar{v}_p^i} \le x_{aq}^i - x_{dq+1}^i \le \frac{d_p}{\underline{v}_p^i}$$

$$\forall i \le m,\ p \in P$$

$\frac{d_p}{\bar{v}_p^i}$: کوتاه ترین زمان سیر در بلاک، $\frac{d_p}{\underline{v}_p^i}$: طولانی ترین زمان سیر در بلاک

$x_{aq+1}^i - x_{dq}^i$: زمان سیر در بلاک

برای قطارهای رفت:

$$x_{a2}^{3} - x_{d1}^{3} = 20$$

$$x_{a3}^{3} - x_{d2}^{3} = 17$$

$$x_{a4}^{3} - x_{d3}^{3} = 20$$

$$x_{a2}^{4} - x_{d1}^{4} = 13$$

$$x_{a3}^{4} - x_{d2}^{4} = 13$$

$$x_{a4}^{4} - x_{d3}^{4} = 14$$

$$x_{a2}^{5} - x_{d1}^{5} = 20$$

$$x_{a3}^{5} - x_{d2}^{5} = 17$$

برای قطارهای برگشت:

$$x^1_{a3} - x^1_{d4} = 20$$

$$x^1_{a2} - x^1_{d3} = 15$$

$$x^1_{a1} - x^1_{d2} = 15$$

$$x^2_{a3} - x^2_{d4} = 20$$

$$x^2_{a2} - x^2_{d3} = 15$$

محدودیت ۷: برای جلوگیری از اعزام قطارها قبل از زودترین زمان مجاز اعزام:

$$x_{Oi}^{i} \geq y_{Oi}^{i}$$

$$x_{d4}^{1} \geq 60$$

$$x_{d4}^{2} \geq 110$$

$$x_{d1}^{3} \geq 80$$

$$x_{d1}^{4} \geq 110$$

$$x_{d1}^{5} \geq 146$$

محدودیت ۸: برای جلوگیری از اعزام قطار قبل از رسیدن به ایستگاه و توقف به اندازه توقف برنامه ریزی شده:

$$x_{aq}^{i} + s_{q}^{i} \leq x_{dq}^{i}$$

$x_{a3}^{1} + 15 \leq x_{d3}^{1}$	$x_{a2}^{4} \leq x_{d2}^{4}$
$x_{a2}^{1} + 10 \leq x_{d2}^{1}$	$x_{a3}^{4} \leq x_{d3}^{4}$
$x_{a3}^{2} + 10 \leq x_{d3}^{2}$	$x_{a2}^{5} + 10 \leq x_{d2}^{5}$
$x_{a2}^{3} + 10 \leq x_{d2}^{3}$	
$x_{a3}^{3} + 20 \leq x_{d3}^{3}$	

زمانبندی حرکت قطارها

زمانبندی حرکت قطارها با استفاده از مدل ریاضی