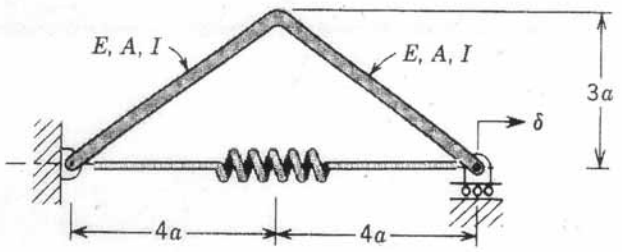
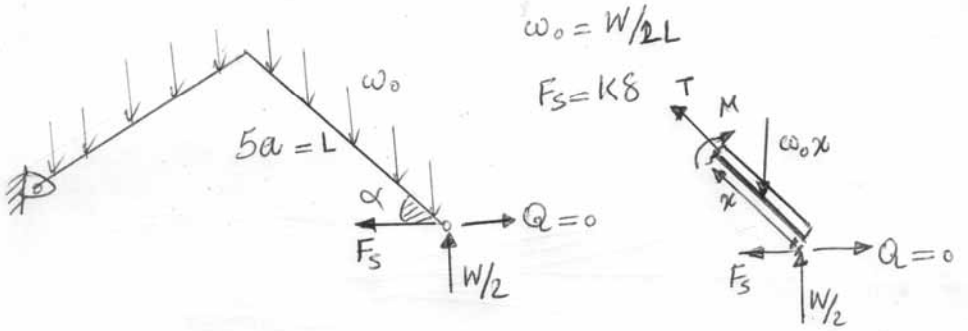
1- جابجایی افقی (δ) قاب زیر را در اثر وزن خود بیابید. وزن کل قاب W و سفتی فنر K می باشد. وزن را بصورت بار گسترده در نظر بگیرید. هم انرژی خمشی و هم انرژی محوری را در محاسبات در نظر بگیرید.



$\omega_0 = W/2L$

$F_S = K\delta$



$$M = x\sin\alpha\,(Q - K\delta) + \cos\alpha\left(\frac{W}{2}x - \omega_0\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = x\sin\alpha$$

$$T = \sin\alpha\left(\omega_0 x - \frac{W}{2}\right) + (Q - K\delta)\cos\alpha$$

$$\frac{\partial T}{\partial Q} = \cos\alpha$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \qquad (*)$$

$$\delta_1 = 2\times\frac{1}{EI}\int_0^L M\frac{\partial M}{\partial Q}\,dx = \frac{2}{EI}\int_0^L x\sin\alpha\left(-x\sin\alpha\,K\delta + \cos\alpha\left(\frac{W}{2}x - \omega_0\frac{x^2}{2}\right)\right)dx$$

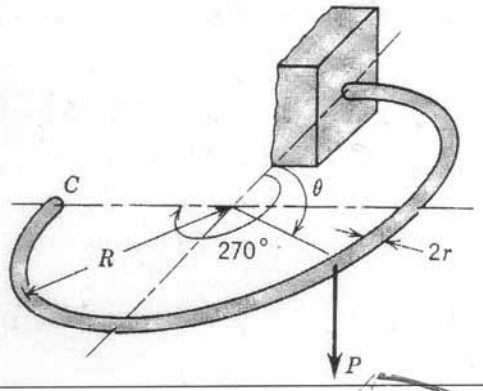
$$\delta_1 = \frac{2}{EI}\left(-\sin^2\alpha\,K\delta\frac{L^3}{3} + \sin\alpha\cos\alpha\frac{W}{2}\frac{L^3}{3} - \frac{\omega_0\sin\alpha\cos\alpha}{2}\frac{L^4}{4}\right)$$

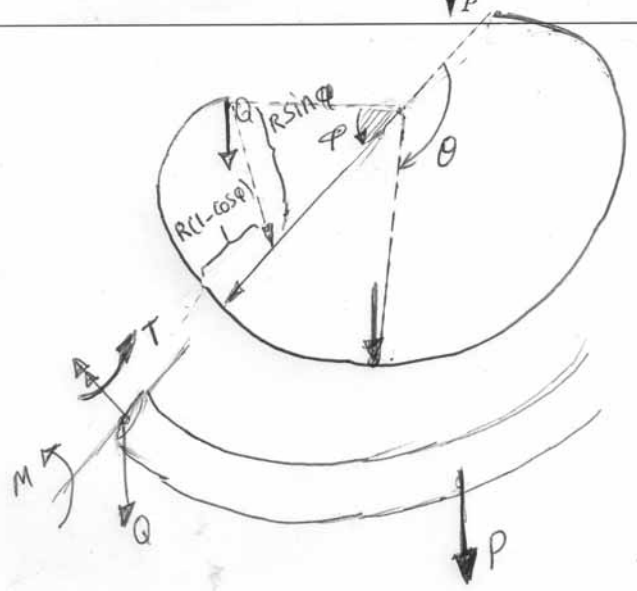
$$\delta_2 = 2*\frac{1}{AE}\int_0^L T\frac{\partial T}{\partial x}\,dx = \frac{2}{AE}\int_0^L \cos\alpha\left(\sin\alpha\left(\omega_0 x - \frac{W}{2}\right) - K\delta\cos\alpha\right)dx$$

$$\delta_2 = \frac{2}{AE}\left(\omega_0\frac{L^2}{2}\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \frac{W}{2}\cos\alpha\sin\alpha L - K\delta\cos^2\alpha L\right)$$

$$(*)\ \delta = \left(1 + \frac{2LK\cos^2\alpha}{AE} + \frac{2\sin^2\alpha\,KL^3}{3EI}\right)^{-1} * \left(\frac{2\sin\alpha\cos\alpha L^3}{EI}\left(\frac{W}{6} - \frac{\omega_0 L}{8}\right) + \frac{2\sin\alpha\cos\alpha L}{AE}\left(\frac{\omega_0 L}{2} - \frac{W}{2}\right)\right)$$

2- بار P از محل تکیه گاه حرکت کرده به سمت نقطه C نزدیک میشود. جابجایی قائم نقطه C را بر حسب موقعیت بار (θ) بیابید. هم انرژی خمشی و هم انرژی پیچشی را در محاسبات در نظر بگیرید.





$0<\varphi<\frac{3\pi}{2}-\theta$ $\quad M=QR\sin\varphi\ ,\ T=QR(1-\cos\varphi)\quad Q=0\quad U=0$ کلی

$\varphi>\frac{3\pi}{2}-\theta$ $\quad M=QR\sin\varphi+PR\underbrace{\sin\left(\varphi-\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\right)}_{\cos(\theta+\varphi)}$

$$\frac{\partial M}{\partial Q}=R\sin\varphi$$

$$T=QR(1-\cos\varphi)+PR\left(1-\cos\underbrace{\left(\varphi-\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\right)}_{-\sin(\theta+\varphi)}\right)$$

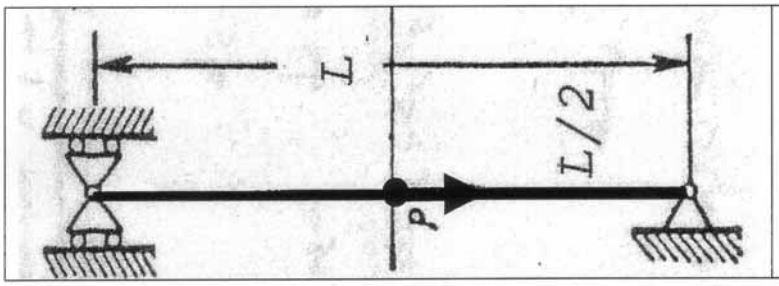
$$\partial T/\partial Q=R(1-\cos\varphi)$$

$$\delta_1=\frac{1}{EI}\int_0^{3\pi/2}M\frac{\partial M}{\partial Q}R\,d\varphi\ ;\ \delta_2=\frac{1}{GJ}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}T\frac{\partial T}{\partial Q}R\,d\varphi$$

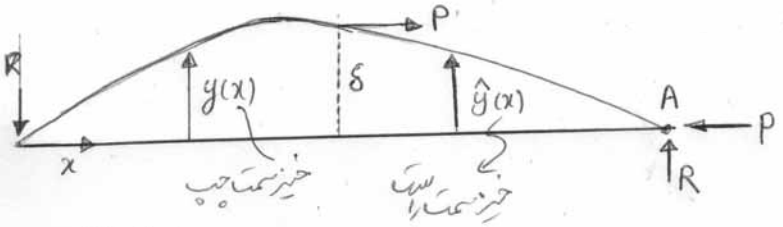
$$\delta=\delta_1+\delta_2$$

$$\delta_1=\frac{PR^3}{EI}\int_{3\pi/2-\theta}^{3\pi/2}\sin\varphi\cos(\theta+\varphi)\,d\varphi=\left(-\frac{\theta\sin\theta}{2}\right)\frac{PR^3}{EI}$$

$$\delta_2=\frac{PR^3}{GJ}\int_{\frac{3\pi}{2}-\theta}^{\frac{3\pi}{2}}(1-\cos\varphi)(1+\sin(\theta+\varphi)\,d\varphi=\frac{PR^3}{GJ}\left(1-\sin\theta-\cos\theta+\theta-\theta\frac{\sin\theta}{2}\right)$$



3- بار P در وسط تیری دو سر مفصل به صلبیت خمشی EI وارد میشود. مقدار بار کمانش P را محاسبه نمایید.

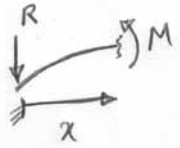


$\Sigma M_A = 0$

$R * L = P\delta$

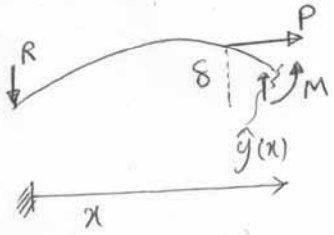
$R = P\frac{\delta}{L}$

$0 < x < L/2$



$$M = EIy'' = -Rx = -\frac{P\delta}{L}x \quad (1)$$

$\frac{L}{2} < x < L$



$$M = EI\hat{y}'' = -Rx + P(\delta - \hat{y})$$

$$\Rightarrow EI\hat{y}'' + P\hat{y} = P\delta - \frac{P\delta}{L}x \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow y(x) = -\frac{P\delta}{L}\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \qquad 0 < x < L/2$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

$$(2) \rightarrow \hat{y}(x) = C_3 \sin(\alpha x) + C_4 \cos(\alpha x) + \delta(1 - x/L)$$

جواب عمومی — جواب خصوصی

شرایط مرزی:

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\hat{y}(L) = 0 \Rightarrow C_3 \sin\alpha L + C_4 \cos\alpha L = 0$$

$$\hat{y}(\tfrac{L}{2}) = \delta \Rightarrow C_3 \sin\frac{\alpha L}{2} + C_4 \cos\frac{\alpha L}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta/EI$$

$$y(L/2) = \delta \Rightarrow -P\delta\frac{L^3}{48} + C_1 L/2 = \delta/EI$$

پیوستگی شیب: $y'(L/2) = \hat{y}'(L/2) \Rightarrow -\frac{P\delta(L/2)^2}{2} + C_1 = \alpha\left(C_3 \cos\frac{\alpha L}{2} - C_4 \sin\frac{\alpha L}{2}\right)$

چنانچه معادلات را ترتیب C_1, C_3, C_4, δ مرتب کنیم به دستگاه همگن زیر می‌رسیم

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{2} & 0 & 0 & -1-\frac{\alpha^2L^2}{48} \\ 0 & \sin\frac{\alpha L}{2} & \cos\frac{\alpha L}{2} & -1/2 \\ 1 & -\alpha\cos\frac{\alpha L}{2} & \alpha\sin\frac{\alpha L}{2} & 1/L - \frac{2}{8} \\ 1 & \sin\alpha L & \cos\alpha L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \\ \delta \end{bmatrix} = 0$$

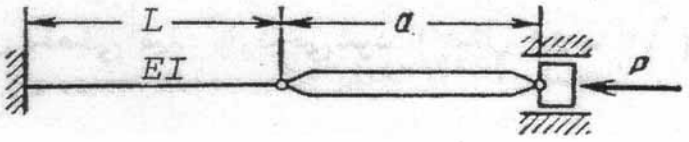
برای رسیدن به جواب غیر بدیهی دترمینان ماتریس ضرائب باید صفر باشد

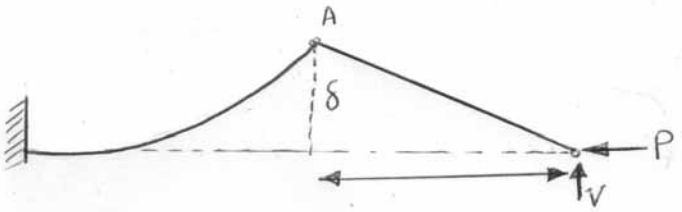
$$\rightarrow tg\frac{\alpha L}{2} = \frac{3(\frac{\alpha L}{2})}{(\frac{\alpha L}{2})^2 - 9}$$

جواب اول: $\frac{\alpha L}{2} = 2.16$

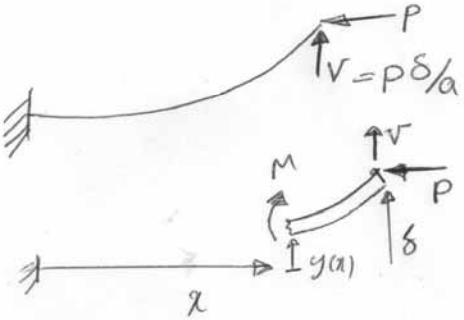
$$P_{cr_1} = 18.7\frac{EI}{L^2}$$

4- بار P به انتهای میله صلبی به طول a وارد میشود. میله صلب به تیر یکسرگیردار الاستیک بطول L متصل میباشد. مقدار بار کمانش P را محاسبه نمایید.





$$\Sigma M_A = 0 \qquad Va = P\delta \Rightarrow V = P\delta/a$$



$$M = EIy'' = P\frac{\delta}{a}(L-x) + P(\delta - y(x))$$

$$EIy'' + Py = P\left(\frac{\delta L}{a} + \delta - \frac{\delta}{a}x\right)$$

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + \delta\left(\frac{L}{a} + 1 - \frac{x}{a}\right)$$

شرایط مرزی

$x = 0 \quad y = 0 \Rightarrow B + \delta\left(\frac{L}{a}+1\right) = 0 \Rightarrow B = -\delta\left(1+\frac{L}{a}\right)$

$x = 0 \quad y' = 0 \Rightarrow \alpha A - \frac{\delta}{a} = 0 \Rightarrow A = \frac{\delta}{a\alpha}$

$x = L \quad y = \delta \Rightarrow \frac{\delta}{a\alpha}\sin\alpha L - \delta\left(1+\frac{L}{a}\right)\cos\alpha L + \delta = 0$

!!

$$\frac{\sin\alpha L}{\alpha} - (a+L)\cos\alpha L + a = 0$$

$a \to 0 \Rightarrow$ حالت خاص

$$\tan\alpha L = \alpha L$$

می رسیم به تیر یک سر منفصل یک سر گیردار